

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

В. П. ШПАЧУК, О. М. КУЗНЕЦОВ

ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

Частина 1

ОСНОВИ МЕХАНІКИ ДЕФОРМІВНОГО ТІЛА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

**Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2018**

УДК 539.3(075)

Ш83

Автори:

Шпачук В. П., доктор технічних наук, професор;

Кузнецов О. М., кандидат технічних наук, доцент

Рецензенти:

Солодов В. Г., доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки і гідравліки Харківського національного автомобільно-дорожнього університету;

Гапонов В. С., доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри деталей машин і прикладної механіки Харківського національного технічного університету «ХПІ»

Рекомендовано до друку

Вченою радою Харківського національного університету

міського господарства імені О. М. Бекетова

(протокол № 1 від 29 вересня 2017 р.)

Шпачук В. П.

Ш83 Прикладна механіка. В 2-х ч. Ч. 1 : Основи механіки деформівного тіла : навч. посібник / В. П. Шпачук, О. М. Кузнецов ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 116 с.

Навчальний посібник містить головні питання з основ механіки деформівного тіла. У кожному розділі наведено приклади задач та методики їхнього розв'язання.

Посібник складено з метою допомогти студентам електромеханічних спеціальностей, цивільного захисту та охорони праці вищих навчальних закладів під час підготовки до практичних занять, контрольних робіт, самостійної роботи в позааудиторний час, заліків, іспитів, виконання курсового проекту й розрахунково-графічних завдань із прикладної механіки.

УДК 539.3(075)

© В. П. Шпачук, О. М. Кузнецов, 2018

© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018

ЗМІСТ

ВСТУП	5
1 ПОЧАТКОВІ ПОЛОЖЕННЯ	9
1.1 Головні гіпотези й припущення	9
1.2 Різновиди навантажень і головних деформацій	11
1.3 Метод перерізів. Напруження	13
Контрольні запитання до розділу 1	16
2 РОЗТЯГ І СТИСК	18
2.1 Напруження й деформації розтягу й стиску	18
2.2 Закон Гука для розтягу і стиску	20
2.3 Поперечна деформація розтягу та стиску	22
2.4 Діаграма розтягу маловуглецевої сталі	23
2.5 Розрахункова формула на міцність для розтягу (стиску)	26
2.6 Статично невизначені задачі. Вплив температури	29
2.7 Зминання	32
2.8 Потенціальна енергія деформації	33
Контрольні запитання до розділу 2	34
3 ЗСУВ (ЗРІЗ)	36
3.1 Напруження й деформації зсуву	36
3.2 Розрахункова формула для зсуву	37
3.3 Деформація зсуву. Закон Гука	37
3.4. Закон парності дотичних напружень	38
3.5 Напруження в похилих перерізах. Головні напруження	39
Контрольні запитання до розділу 3	42
4 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ	43
4.1 Статичний момент площі	43
4.2 Полярний момент інерції	44
4.3 Осьовий момент інерції	45
4.4 Осьовий момент інерції для паралельних осей	46
4.5 Головні осі й головні моменти інерції. Радіус інерції	47
Контрольні запитання до розділу 4	48

5 КРУЧЕННЯ	50
5.1 Відомості про деформацію кручення циліндра	50
5.2 Епюри крутних моментів	51
5.3 Напруження й деформації кручення	53
5.4 Розрахункові формули на міцність і жорсткість для кручення	57
Контрольні запитання до розділу 5	60
6 ЗГИН	61
6.1 Чистий згин прямого бруса	61
6.2 Згинаючий момент і поперечна сила	62
6.3 Диференціальні залежності для згину	65
6.4 Нормальні напруження чистого згину	70
6.5 Розрахункова формула на міцність для випадку згину	72
6.6 Дотичні напруження деформації згину	79
6.7 Косий згин	80
6.8 Диференціальне рівняння пружної лінії балки. Умова жорсткості	82
Контрольні запитання до розділу 6	84
7 ГІПОТЕЗИ МІЦНОСТІ	86
7.1 Згин і кручення	89
7.2 Кручення й розтяг (стиск)	93
Контрольні запитання до розділу 7	94
8 МІЦНІСТЬ ПРИ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ	95
8.1 Явище втопленості матеріалів	95
8.2 Розрахунки на міцність при змінних напруженнях	100
8.3 Розрахунки на міцність у задачах динаміки	102
Контрольні запитання до розділу 8	107
9 СТІЙКІСТЬ СТИСНЕНИХ СТРИЖНІВ	108
9.1 Поздовжній згин	108
9.2 Розрахунки стрижнів на стійкість	109
Контрольні запитання до розділу 9	114
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	115

ВСТУП

Теоретичні основи побудови машин, розрахунки конструкцій і деталей машин на міцність почали формуватися здавна. Це було пов'язано із практичним використанням механічних пристроїв таких як блок, похила площина, важіль для побудови великих споруд. Головні поняття механіки розвивалися в нерозривному зв'язку із практичними потребами людства. Протягом історії розвитку механіки можна простежити взаємний зв'язок між проблемами механіки й техніки.

Перші наукові результати в галузі механіки знаходимо в працях Аристотеля (384–322 рр. до н. е.) і Архімеда (287–212 рр. до н. е.), якому належать один із головних законів гідростатики й теорія важеля.

Розрахунки конструкцій виникли в епоху Відродження, коли розвиток техніки, торгівлі, мореплавства, військової справи потребував наукових обґрунтувань, потрібних для будівництва великих морських суден, мостів, гідротехнічних споруд та інших складних конструкцій. Засновниками цієї науки вважають ученого Галілео Галілея (1564–1642 рр.), англійського вченого Роберта Гука (1635–1703 рр.), французьких вчених Огюста Кулона (1736–1806 рр.) тощо і С. Пуассона (1781–1840 рр.) тощо.

Швидкий і успішний розвиток науки сприяв блискучому розв'язанню багатьох практичних задач у галузі техніки. Розрахунки конструкцій виникли наприкінці XVIII ст.

Опір матеріалів – наука, побудована на положеннях механіки, яка розглядає рівновагу тіл під дією зовнішніх і внутрішніх сил, і спирається на низку положень, одержаних на підставі експериментальних досліджень поведінки матеріалів під навантаженням. Основи цієї науки було закладено в далекому минулому, але широкого розвитку вона набула в період розвитку техніки в XIX ст. Праці Остроградського, Ейлера, Ясинського, Журавського, Кирпичова, Крилова з опору матеріалів є класичними й мають світове значення. Так, наприклад, Ейлер одержав формулу для визначення критичної сили для стиснених стержнів, що названа його ім'ям; ім'я Ясинського відомо емпіричною формулою Ясинського для стиснених стержнів; Журавський винайшов формулу визначення дотичних напружень при поперечному згині. Велику практичну цінність мають праці Галеркіна, Тимошенко, Келдиша, Диника, Власова.

Досвід експлуатації машин і механізмів доводить, що всі частини конструкцій під дією навантажень деформуються, тобто змінюють

свою форму й розміри, а іноді руйнуються. Розглянемо методи розрахунку елементів конструкцій на міцність, жорсткість і стійкість.

Міцністю називають здатність матеріалу конструкції чинити опір дії зовнішніх сил не руйнуючись.

Розрахунки на міцність дають змогу визначити розміри й форму деталей, що витримують задане навантаження при найменших витратах матеріалу.

Під *жорсткістю* розуміють здатність тіла або конструкції протидіяти деформації. Розрахунки на жорсткість гарантують, що зміна форми й розмірів конструкцій і їхніх елементів не перевищать припустимих норм.

Під *стійкістю* розуміють здатність конструкції та її елементів зберігати початкову форму пружної рівноваги. Розрахунки на стійкість запобігають можливості раптової втрати стійкості, тобто викривлення довгих або тонких деталей. Прикладом втрати стійкості може бути раптове викривлення довгого прямолінійного стрижня при стисканні вздовж осі.

Для того, щоб конструкція цілком відповідала вимогам міцності, жорсткості й стійкості, тобто була надійною в експлуатації, потрібно надати її елементам найраціональніші форми і, знаючи властивості матеріалів, з яких вони виготовлятимуться, визначити відповідні розміри залежно від навантаження. Машини та споруди необхідно будувати міцними й надійними в експлуатації, але водночас легкими й дешевими, тобто розрахунки повинні забезпечити надійність роботи конструкції й пов'язуватись із принципами економічного її виготовлення та експлуатації.

Різні конструкції, машини й механізми використовуються в різноманітних галузях техніки, і здебільшого вони складаються з аналогічних деталей і вузлів. Звідси випливає, що використовуються ті самі методи їхнього аналізу, розрахунку й проектування.

На практиці доводиться мати справу з конструкціями складної форми, але їх можна уявити складеними з окремих простих елементів – брусів, пластин, оболонок і масивів. Найважливішим розрахунковим елементом в опорі матеріалів є *стрижень або брус*, тобто тіло, поперечні розміри якого малі порівнюючи з довжиною. Бруси бувають прямолінійні й криволінійні, сталого й змінного перерізу. Залежно від призначення в конструкції бруси називають колонами, балками й стрижнями. Бруси із прямолінійною віссю, які зазнають розтягу або стиску, часто називають стрижнями.

Крім розрахунку брусів, опір матеріалів займається розрахунком *пластин і оболонок*, тобто тіл, які мають малу товщину порівнюючи з

іншими розмірами (наприклад, резервуари, труби, обшивки транспорту, кораблів та літаків).

Тіла, у яких усі три виміри однакового порядку, називають *масивами* (наприклад, фундаменти, станини верстатів). Розрахунки пластин, оболонок і масивів у цьому курсі не розглядаються.

Плоский переріз, перпендикулярний до осі бруса, називають *поперечним*.

Унаслідок деформації під дією зовнішніх сил усередині тіла виникають *внутрішні сили пружності*, які протидіють деформації, і намагаються повернути частинки тіла в початкове положення.

В опорі матеріалів вивчають деформації тіл і внутрішні сили, що виникають під час деформації. Після припинення дії зовнішніх сил деформація може повністю або частково зникнути. Здатність матеріалу повертатися до початкової форми після припинення дії зовнішніх сил називають *пружністю*. Деформацію, яка зникає після припинення дії зовнішніх сил, називають *пружною*, а деформацію, яка не зникає після припинення дії зовнішніх сил, називають *залишковою* або *пластичною*. Здатність матеріалу до значних залишкових деформацій без руйнування називають *пластичністю*, а самі матеріали називають пластичними. До таких матеріалів належать маловуглицева сталь, алюміній, мідь, латунь тощо.

Підкреслимо, що *значні залишкові деформації* здебільшого спричиняють порушення нормальної роботи конструкції, за що їх *вважають порушенням міцності*.

Матеріали, які мають дуже малу пластичність, називають *крихкими*. На відміну від пластичних, крихкі матеріали руйнуються без помітних залишкових деформацій. До крихких матеріалів належать чавун, тверді сплави, скло, бетон, цегла тощо.

Наука про опір матеріалів ґрунтується на законах теоретичної механіки, у якій тіла вважають абсолютно жорсткими, тобто не здатними до деформації. Користуючись розглянутою у теоретичній механіці аксіомою затвердіння, в опорі матеріалів для визначення реакцій в'язів і діючих у перерізах деталей внутрішніх сил застосовують до деформованих тіл умови рівноваги статички. Проте *для розрахунків на міцність та жорсткість деякі положення* теоретичної механіки виявляються *непридатними*, зокрема такі:

- 1) зовнішні сили, які діють на тіло, не можна замінити їх рівнодійною або еквівалентною системою сил;
- 2) силу не можна переносити вздовж лінії її дії;
- 3) пару сил не можна пересувати в площині дії пари та в другу площину.

Ці правила мають виняток. Так, наприклад, сили, прикладені до невеликої поверхні тіла, як і в теоретичній механіці, вважатимемо зосередженими, тобто прикладеними до однієї точки; розподілені реактивні сили, прикладені до кінця балки при защемленні його, як і раніше, замінюватимемо реактивною силою та реактивним моментом. Такі заміни не вносять істотних змін в умови деформації тіла. Це положення має назву принципу пом'якшених граничних умов або принципу Сен-Венана, за ім'ям французького вченого Сен-Венана (1797–1886 рр.).

Принцип Сен-Венана можна сформулювати так: у точках тіла, достатньо віддалених від місць прикладання зовнішніх сил, величина внутрішніх сил дуже мало залежить від першого способу прикладення зовнішніх сил. Надалі, вивчаючи окремі різновиди деформацій, на підставі принципу Сен-Венана не будемо, звичайно, цікавитися певними способами прикладання зовнішніх сил.

Вирішуючи якусь задачу, необхідно вибрати відповідну схему й установити, які фактори істотні, а якими можна знехтувати. Реальний об'єкт, для якого не враховуються неістотні діючі фактори, зветься *розрахунковою схемою*.

Так, якщо розраховується трамвай, і потрібно визначити розміри вала приводу, то у цьому разі визначаються сили взаємодії валу з іншими деталями й розглядатиметься тільки відповідна деталь. Якщо необхідно вирішити питання міцності рами вагона трамвая, то враховуються конструктивні особливості рами, обчислюються сили, які діють на раму й приймається відповідна розрахункова схема.

1 ПОЧАТКОВІ ПОЛОЖЕННЯ

1.1 Головні гіпотези й припущення

Конструкційні матеріали, з яких виготовляють деталі машин і споруд, не є, точно кажучи, неперервними, однорідними й ізотропними (такими, що мають однакові властивості в усіх напрямках).

У процесі виробництва заготовок і виготовлення з них деталей у матеріалі виникають різні поверхневі й внутрішні дефекти, які важко врахувати, наприклад, раковини, тріщини й неоднорідності структури в литих деталях, волосовини в штампованих деталях, початкові внутрішні зусилля, спричинені нерівномірністю охолодження литих і кованих деталей, нерівномірністю висихання й неоднорідністю деревини, нерівномірністю тверднення й неоднорідністю бетону тощо.

Оскільки закономірності виникнення зазначених явищ встановити неможливо, то в опорі матеріалів приймають низку гіпотез і припущень, які дають змогу не розглядати ці явища. Унаслідок цього об'єктом вивчення в опорі матеріалів стає не реальне тіло, а його наближена модель. Експериментальна перевірка висновків, здобутих на підставі наведених далі гіпотез і припущень, доводить, що ці висновки цілком придатні для використання в практиці інженерних розрахунків. Розглянемо такі найважливіші гіпотези й припущення стосовно фізико-механічних властивостей матеріалів:

1. *Гіпотеза про відсутність початкових внутрішніх зусиль.* Згідно за цією гіпотезою припускають, що коли немає причин для деформації тіла (навантаження, зміна температури тощо), то в усіх його точках *внутрішні зусилля дорівнюють нулю*. Отже, сили взаємодії між частинками не навантаженого тіла до уваги не беруть.

2. *Припущення про однорідність матеріалу.* Фізико-механічні властивості тіла в різних точках можуть бути неоднаковими. В опорі матеріалів ці відмінності нехтують, припускаючи, що матеріал в усіх точках тіла має *однакові властивості*.

3. *Припущення про неперервність матеріалу.* Згідно за цим припущенням, матеріал будь-якого тіла має *неперервну будову* та є *суцільним середовищем*. Атомістична теорія дискретної будови матеріалу до уваги не береться. Припущення про неперервну будову матеріалу дає змогу використовувати під час розрахунків методи вищої математики (диференціальне й інтегральне числення).

4. *Припущення про ізотропність матеріалу.* Це припущення передбачає, що матеріал тіла має *однакові властивості* в усіх

напрямах. Багато матеріалів складається із кристалів, у яких фізико-механічні властивості в різних напрямках істотно відрізняються. Проте через наявність в тілі великої кількості безладно розміщених кристалів, властивості всієї маси матеріалу в різних напрямках вирівнюються. Припущення про ізотропність добре підтверджується практикою для більшості матеріалів. Ця гіпотеза виконується наближено для таких матеріалів, як камінь, пластмаси, залізобетон. Матеріали, які мають неоднакові властивості в різних напрямках, називають *анізотропними*, наприклад, деякі пластики (гетинакс), дерева.

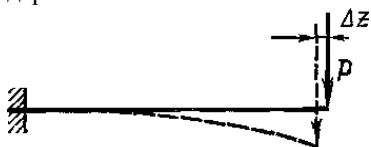


Рисунок 1.1

вантаження деформації повністю зникають і тіло повертається до початкової форми.

Розглянемо тепер гіпотези й припущення, пов'язані з деформаціями елементів конструкцій.

Зміну лінійних і кутових розмірів тіла називають відповідно *лінійною та кутовою деформацією*.

Зміну положення (координат) точок тіла, спричинену деформацією, називають *переміщенням*.

1. *Припущення про малість переміщень*, або *принцип початкових розмірів*. За цим припущенням деформації тіла й пов'язані з ними переміщення точок і перерізів, зазвичай дуже малі порівнюючи з розмірами тіла.

На підставі цього змінами в розміщенні зовнішніх сил, спричинених деформацією, нехтують.

Так, наприклад, не беруть до уваги при навантаженні зміщення на Δz лінії дії сил, показане на рисунку 1.1.

Припущення про лінійну деформацію

тіл. Згідно із цим припущенням, зміщення точок і перерізів пружного тіла в певних межах навантаження прямо пропорційне силам, які спричиняють ці переміщення.

5. *Припущення про ідеальну пружність*. Це припущення передбачає, що матеріал у певних межах навантаження виявляє *ідеальну пружність*, тобто після зняття на-

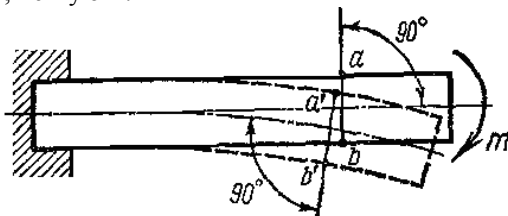


Рисунок 1.2

2. *Гіпотеза плоских перерізів*, або гіпотеза Бернуллі. Згідно із цією гіпотезою, плоскі поперечні *перерізи* (переріз $a-b$ на рис. 1.2), зроблені в тілі до деформації, залишаються під час деформації плоскими й нормальними до осі (переріз a^1-b^1). Цю гіпотезу вперше висловив швейцарський учений Якоб Бернуллі (1654–1705 рр.) і за нею вивчають більшість головних деформацій бруса.

3. У процесі вивчення деяких деформацій будемо вважати брус складеним з нескінченної кількості волокон, паралельних осі, і будемо припускати, що під час деформування *волокна не тиснуть одне на одне* – це припущення називають *гіпотезою про ненависання волокон*. Наприклад, таке явище спостерігається при розтягу і стиску бруса.

1.2 Різновиди навантажень і головних деформацій

У процесі роботи машин і споруд їхні вузли й деталі сприймають сили взаємодії других тіл. Такі сили для певного тіла називаються *зовнішніми*. Зовнішні сили бувають об'ємні (сили тяжіння, сили інерції), або поверхневі. Останні – це сили, наприклад, контактної взаємодії розглядуваного елемента із сусідніми елементами.

Поверхневі навантаження бувають *зосередженими* або *розподіленими*. Навантаження, яке розподілене по невеликій частині поверхні тіла, завжди можна замінити рівнодійною. Цю силу називають зосередженою. Крім того, бувають навантаження, які можна подати у вигляді *зосередженого моменту пари сил*.

Залежно від властивостей дії навантаження поділяють також на *статичні* й *динамічні*.

Статичними називають навантаження, значення, напрям і місце прикладання яких залишаються сталими, або змінюються повільно. Приклад статичного навантаження – сила тяжіння споруд.

Динамічними називають навантаження напрям, величина або місце прикладання, яких швидко змінюється за часом. Дія таких навантажень супроводжується значними прискореннями як деформованого тіла, так і тіл, що взаємодіють із ним. До динамічних належать ударні, раптово прикладені й повторно-змінні навантаження.

Ударні навантаження виникають, наприклад, під час удару колеса вагона на стику рейок, кування металу, або забивання паль за допомогою копра. Ударному навантаженню властиво те, що в мить його прикладення тіло, яке спричинює навантаження, має певну кінетичну енергію.

Прикладом *раптово прикладеного навантаження* є тиск колеса на рейку в зоні контакту при коченні колеса. Таке навантаження збільшується від нуля до свого граничного значення за дуже малий проміжок часу.

Повторно-змінних навантажень зазнають, наприклад, деталі кривошипно-повзункового механізму, осі вагонів, коливання елементів конструкцій тощо. Такі навантаження безперервно й періодично змінюються за часом.

До динамічних належать також інерційні навантаження, наприклад, сили інерції в ободі обертового маховика.

Необхідно пам'ятати, що до зовнішніх сил, які беруть до уваги при розрахунках конструкцій, належать не тільки активні сили, а й реакції в'язей і сили інерції (для руху з достатньо великим прискоренням).

Розглянемо далі питання про *головні деформації*. Із практики відомо, що під час експлуатації елементи конструкцій зазнають таких головних деформацій:

1. *Розтяг* – цієї деформації зазнають, наприклад, канати, троси, ланцюги, стрижень тоді, коли вздовж його осі прикладені протилежно спрямовані сили. Ці деталі при навантаженні подовжуються.

2. *Стиск* – на стиск працюють, наприклад, колони, цегляна кладка, пуанسونи штампів, стержні ферм, які при стисканні вкорочуються.

3. *Зсув* виникає тоді, коли зовнішні сили зміщують два паралельних плоских перерізи один відносно одного при незмінній відстані між ними. Деформації зсуву зазнають заклепки, болти, шпонки, шви зварних з'єднань. Деформацію зсуву, доведену до руйнування матеріалу, називають зрізом. Зріз виникає, наприклад, під час різання ножицями або при штампуванні деталей із листового матеріалу.

4. *Кручення* виникає при дії на стрижень зовнішніх сил, які утворюють момент відносно осі стрижня. На кручення працюють вали, які передають потужність під час обертального руху. Зазвичай, деформація кручення супроводжується й іншими деформаціями, наприклад згином.

5. *Згин* полягає у викривленні осі стрижня. На згин працюють балки, осі вагонів, вали, зубці зубчатих коліс та інші елементи конструкцій.

Дуже часто елементи конструкцій зазнають дії навантажень, які спричиняють одночасно декілька головних деформацій.

1.3 Метод перерізів. Напруження

Взаємодія між окремими частинками тіла характеризується *внутрішніми силами*.

Метод перерізів полягає в тому, що зрівноважене тіло (рис. 1.3) умовно розрізають площиною на дві частини, будь-яку з них відкидають і замість неї до перерізу залишеної частини прикладають внутрішні сили. Залишену частину розглядають як самостійне тіло, яке перебуває в рівновазі під дією зовнішніх і прикладених до перерізу внутрішніх сил.

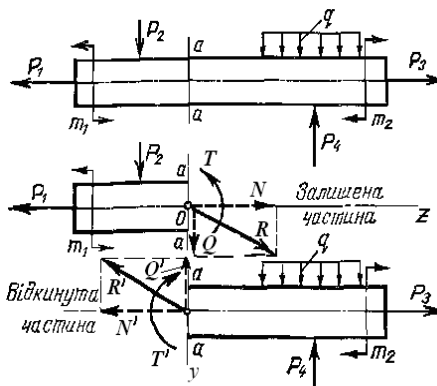


Рисунок 1.3

Зробимо поперечний переріз $a-a$ бруса (рис. 1.3) і розглянемо рівновагу його лівої частини. У випадку плоскої довільної системи зовнішніх сил статичним еквівалентом внутрішніх сил, що діють у перерізі $a-a$ залишеної частини бруса, будуть головний вектор R , прикладений до центра ваги перерізу, і головний момент T . Очевидно, що за третім законом Ньютона внутрішні сили, які діють у перерізі залишеної й відкинutoї частини тіла, однакові за модулем, але протилежні за напрямом (рис. 1.3). Розкладемо головний вектор на складову N , напрямлену вздовж осі бруса, і складову Q , яка перпендикулярна до цієї осі й лежить у площині поперечного перерізу. Ці складові головного вектора разом із головним моментом називатимемо внутрішніми силовими факторами, які діють у перерізі бруса. Складову N назовемо *поздовжньою силою*, складову Q – *поперечною силою*, пару сил T – *згинальним моментом*.

Далі будемо завжди напрямляти поздовжню силу N від перерізу. У такому разі, якщо при розрахунку знайдемо додатне значення поздовжньої сили, то стрижень розтягнений і навпаки.

Для визначення трьох внутрішніх силових факторів складемо рівняння рівноваги залишеної частини бруса (два рівняння проекцій

сил на осі Oy ; Oz і рівняння моментів сил відносно точки O – полюса системи координат):

$$\sum Z=0; \quad \sum Y=0; \quad \sum M_O=0$$

$$\text{або} \quad N + \sum P_{iz} = 0; \quad Q + \sum P_{iy} = 0; \quad T + \sum M_o(P_i) = 0,$$

де $\sum P_{iz}$; $\sum P_{iy}$; $\sum M_o(P_i)$ – відповідно суми проекцій зовнішніх сил на осі координат і сума моментів цих сил відносно центра O ваги перерізу.

$$\text{З цього знаходимо } N = -\sum P_{iz}; \quad Q = -\sum P_{iy}; \quad T = -\sum M_o(P_i).$$

Якщо зовнішні сили, які діють на брус, не лежать в одній площині, тобто є просторовою системою сил, то в поперечному перерізі бруса виникає *шість внутрішніх силових факторів* (рис. 1.4), де N – поздовжня сила, Q_x , Q_y – поперечні сили, T_k – крутний момент, T_x , T_y – згинальні моменти відносно осей координат Ox і Oy . Для визначення цих факторів статика надає *шість рівнянь рівноваги* залишеної частини бруса, а саме:

$$\sum X=0; \quad \sum Y=0; \quad \sum Z=0;$$

$$\sum M_x=0; \quad \sum M_y=0; \quad \sum M_z=0.$$

За різних деформацій у поперечному перерізі бруса виникають різні внутрішні силові фактори. Розглянемо такі окремі випадки:

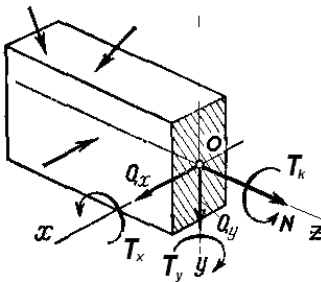


Рисунок 1.4

1. У перерізі виникає *тільки поздовжня сила N* . У цьому разі має місце деформація *розтягу* (якщо сила N напрямлена від перерізу) або деформація *стиску* (якщо сила N напрямлена до перерізу).

2. У перерізі виникає *тільки поперечна сила Q* . У цьому разі матимемо деформацію *зсуву*.

3. У перерізі виникає *тільки крутний момент T_k* . Тоді спостерігається деформація *кручення*.

4. У перерізі виникає *тільки згинальний момент T* . Спостерігається деформація *чистого згину*. Якщо в перерізі одночасно виникає згинальний момент і поперечна сила, то *згин* називають *поперечним*.

5. Якщо в перерізі одночасно виникає декілька внутрішніх силових факторів (наприклад, згинальний і крутний моменти або згинальний момент і поздовжня сила), то це буде поєднання головних деформацій.

Водночас із деформаціями одним із головних понять опору матеріалів є *напруження*. Напруження характеризують інтенсивність внутрішніх сил, які діють у перерізі.

Розглянемо довільно навантажений брус і застосуємо до нього метод перерізів (рис. 1.5). Виділимо в перерізі нескінченно малий елемент площі dA . Вважатимемо, що в його межах внутрішні сили однакові за модулем і напрямом і, отже, є системою паралельних сил. Рівнодійну цієї системи сил позначимо dR .

Визначимо інтенсивність внутрішніх сил у точках елементарної площі:

$$p = dR/dA. \quad (1.1)$$

Величина p – це механічне напруження (внутрішня сила, віднесена до одиниці площі перерізу). Одиниця напруження: $[p] = \text{Н/м}^2$ (паскаль – Па), або мегапаскаль ($1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н/мм}^2$).

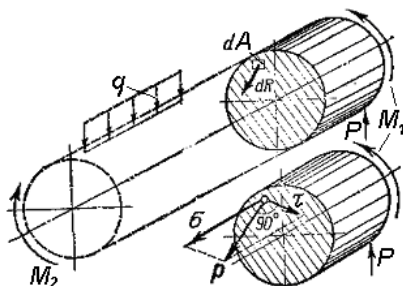


Рисунок 1.5

Розкладемо далі вектор напруження p на дві складові: σ – перпендикулярну до площини перерізу і τ – таку, що лежить у площині перерізу (рис. 1.5). Ці складові назвемо: σ – *нормальне напруження*; τ – *дотичне напруження*.

Оскільки кут між нормальними й дотичними напруженнями дорівнює 90° , то модуль повного напруження p визначається за формулою $p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$.

Розкладання повного напруження на нормальну й дотичну складові має цілком визначений фізичний зміст. Як побачимо далі, у поперечному перерізі бруса у випадках розтягу, стиску й чистого згину діють тільки *нормальні напруження*, а при зсуві й крученні – *тільки дотичні напруження*.

Нарешті, розглянемо гіпотезу, яку називають *принципом незалежності дії сил* і формулюють так: коли на тіло діє декілька навантажень, то внутрішні сили, напруження, переміщення й деформації в будь-якому місці можна визначити як відповідну алгебраїчну суму таких величин, які знайдені від кожного

авантаження окремо. В основі принципу незалежності дії сил лежить положення про лінійну залежність переміщень і сил.

Користуючись принципом незалежності дії сил, від вивчення найпростіших деформацій, коли в поперечних перерізах бруса діють тільки нормальні або тільки дотичні напруження, перейдемо до вивчення складніших деформацій, коли в поперечному перерізі діють різноманітні напруження. Потім можна розглядати випадки поєднання головних деформацій, що іноді називають складним опором.

Зазначимо, що принцип незалежності дії сил стосується тільки конструкцій, деформації яких малі порівняно з їх розмірами й пропорційні діючим навантаженням.

Контрольні запитання до розділу 1

1. Назвіть класифікацію деформівних тіл залежно від їхніх розмірів і форми.

2. Яку деформацію називають пружною, а яку залишковою або пластичною?

3. Сформулюйте принцип пом'якшених граничних умов або принцип Сен-Венана.

4. Поясніть зміст гіпотези про відсутність початкових внутрішніх зусиль.

5. Розкажіть про поняття: однорідність матеріалу, неперервність матеріалу, ізотропність матеріалу, ідеальна пружність.

6. Що називається «деформацією»? Яка причина її виникнення?

7. Поясніть, у чому зміст принципу початкових розмірів?

8. Розкажіть, у чому полягає припущення про лінійну деформацію тіл?

9. Поясніть, у чому зміст гіпотези плоских перерізів і гіпотези про ненависання волокон.

10. Зовнішні сили, їхні різновиди, розмірність.

11. Які навантаження називають статичними, а які динамічними?

12. Як поділяються динамічні навантаження?

13. Назвіть головні різновиди деформацій і поясніть, у яких випадках вони відбуваються і які елементи конструкцій зазнають їх?

14. Зміст методу перерізів, його значення в механіці деформівного тіла.

15. Які внутрішні силові фактори виникають у поперечному перерізі бруса і як вони пов'язані з головними деформаціями?

16. Що називається повним, нормальним і дотичним напруженням?

17. Як позначається і як напрямлене: нормальне напруження, дотичне напруження?

18. Як називається і позначається внутрішнє зусилля в поперечному перерізі стрижня, який навантажений силою, що співпадає з його віссю? Як обчислюється ця сила?

19. Яка внутрішня сила лежить у площі поперечного перерізу стрижня? Як вона називається та позначається?

20. Які пари сил загалом діють в площині поперечного перерізу стрижня? Як називаються та розраховуються моменти цих пар?

21. Як формулюється принцип незалежності дії сил?

2 РОЗТЯГ І СТИСК

2.1 Напруження й деформації розтягу та стиску

Розтягом або *стиском* називають таку деформацію, при якій у будь-якому поперечному перерізі бруса виникає *тільки поздовжня сила*.

Розглянемо невагомий, жорстко зашкелений лівим кінцем прямий брус, уздовж осі якого діють активні сили P і $2P$ (рис. 2.1). Частини бруса сталого перерізу, що містяться між поперечними площинами, в яких прикладені зовнішні (активні або реактивні) сили, називатимемо ділянками. Застосувавши метод перерізів, визначимо на ділянках поздовжні сили N_1 і N_2 . Зробимо спочатку поперечний переріз 1-1 лівої ділянки бруса. У цього разі зовнішні сили горизонтальні – тому в перерізі буде діяти тільки поздовжня сила N_1 .

Поперечна сила Q і згинальний момент T дорівнюватиме нулю.

Визначаємо з умови рівноваги правої частини бруса поздовжню силу N_1 :

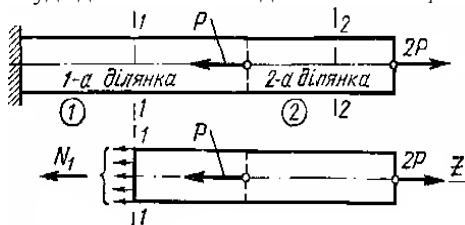


Рисунок 2.1

$$\sum Z = 0; 2P - P - N_1 = 0; \text{ або } N_1 = 2P - P = P.$$

У перерізі 2-2, якщо записати умови рівноваги на правій ділянці, поздовжня сила матиме значення $N_2 = 2P$.

Отже чином, *поздовжня сила* в поперечному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, розміщених по один бік перерізу (маємо на увазі, що всі сили напрямлені вздовж осі бруса). Очевидно, що в межах однієї ділянки поздовжня сила матиме стале значення.

Якщо нанести на поверхню бруса сітку поздовжніх і поперечних ліній і піддати брус деформації розтягу (стиску), то дослід доводить, що:

- поперечні лінії на поверхні бруса залишаються перпендикулярними до осі, а відстань між ними збільшується (при стиску – зменшується);
- поздовжні лінії залишаються прямими, а відстань між ними збільшується (при стиску – зменшується).

З цього дослідів випливає, що для розтягу (стиску) справедлива *гіпотеза плоских перерізів* і, отже, усі волокна видовжуються

(скорочуються) на ту таку саму величину. Тобто під час розтягу та стиску в поперечних перерізах виникають тільки нормальні напруження, які рівномірно розподілені в перерізі. Ці напруження обчислюють за формулою

$$\sigma = N/A, \quad (2.1)$$

де N – поздовжня сила;

A – площа поперечного перерізу.

Очевидно, що для розтягу і стиску форма перерізу на величину напруження не впливає.

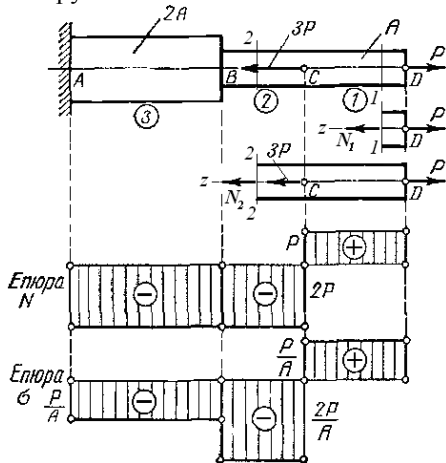


Рисунок 2.2

Розв'язання. Покажемо ділянки AB , BC і CD : межами ділянок є точки прикладення сил і місця зміни розмірів поперечного перерізу. Показуємо в межах ділянки CD переріз 1–1 (рис. 2.2), зображуємо праву частину бруса й зовнішню силу P , яка прикладена до цієї ділянки, а також поздовжню силу N_1 , яку прикладаємо до перерізу. Записуємо таке рівняння рівноваги:

$$\sum Z = 0; \quad -P + N_1 = 0; \quad \text{отже, } N_1 = P \quad (\text{ділянка } CD).$$

Обчислимо також поздовжні сили для ділянки CB і BA :

$$N_2 = -2P; \quad N_3 = -2P.$$

Для побудови епюри поздовжніх сил N покажемо нульову вісь, яка паралельна осі бруса. Величину поздовжніх сил у деякому масштабі відкладаємо при додатних значеннях (розтяг) угору, а при від'ємних (стиск) – униз від осі.

Для наочного зображення розподілу вдовж осі бруса поздовжніх сил і нормальних напружень будують графіки, які називають епюрами, до того ж для нормальних напружень застосовують те саме правило знаків, що і для поздовжніх сил.

Приклад 2.1. Побудувати епюри поздовжніх сил і нормальних напружень для ступінчастого бруса (рис. 2.2), який має площі перерізу відповідно A і $2A$.

Сили N у межах ділянки не змінюються – тобто епюра – пряма, паралельна осі. Епюру штрихуємо лініями, перпендикулярними до осі.

Визначаємо далі такі нормальні напруження:

ділянка AB : $\sigma = N_3/2A = -P/A$;

ділянка BC : $\sigma = N_2/A = -2P/A$;

ділянка CD : $\sigma = N_1/A = P/A$.

Будуємо епюру напружень σ (рис. 2.2) аналогічно побудові епюри N .

Деформації при розтягу (стиску). Уявимо прямий брус сталого поперечного перерізу F , що має довжину ℓ , який жорстко закріплений одним кінцем і навантажений на другому кінці силою P (рис. 2.3). Під дією цієї сили брус видовжиться на деяку величину $\Delta\ell$, яку назовемо *абсолютним видовженням*.

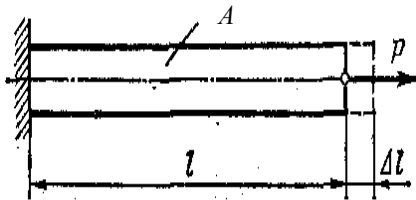


Рисунок 2.3

Відношення абсолютного видовження до початкової довжини ℓ назовемо *відносним видовженням*

$$\varepsilon = \Delta\ell/\ell. \quad (2.2)$$

Відносне видовження ε число безрозмірне, іноді його подають у процентах.

Унаслідок деформації поперечні перерізи бруса переміщуються вздовж осі. Взаємне переміщення двох перерізів дорівнює зміні довжини частини бруса, що лежить між цими перерізами. Отже, деформація розтягу й стиску бруса характеризується абсолютною та відносною деформацією (видовженням або вкороченням).

2.2 Закон Гука для розтягу та стиску

Напруження й деформації розтягу та стиску пов'язані між собою залежністю, яку називають законом Гука, названим на честь англійського фізика Роберта Гука, що встановив цей закон. Закон Гука для розтягу й стиску справедливий лише в певних межах навантаження й формулюється так: *нормальне напруження прямо пропорційне відносній деформації*. Математично закон Гука записується у вигляді

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (2.3)$$

Коефіцієнт пропорційності E характеризує пружність матеріалу, тобто його здатність протидіяти пружним деформаціям розтягу або стиску, і називається модулем поздовжньої пружності або модулем пружності першого роду.

Значення модуля пружності першого роду E для деяких матеріалів дано у таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Матеріал	E , МПа	Матеріал	E , МПа
Чавун	$(1,5-1,6) \cdot 10^5$	Дерево(уздовж волокон)	$(0,1-0,16) \cdot 10^5$
Сталь	$(1,96-2,16) \cdot 10^5$	Текстоліт	$(0,06-0,1) \cdot 10^5$
Мідь	$(1,0-1,3) \cdot 10^5$	Капрон	$(0,01-0,02) \cdot 10^5$
Сплави алюмінію	$(0,69-0,71) \cdot 10^5$	Бетон	$(0,15-0,4) \cdot 10^5$

Модуль пружності й напруження вимірюють в однакових одиницях: $[E] = \text{Па}$.

Якщо у формулу закону Гука підставити напруження σ (2.3) і відносне видовження ε (2.2), то отримуємо

$$\Delta \ell = N\ell / EA = \sigma \ell / E. \quad (2.4)$$

Добуток EA у знаменнику називають *жорсткістю перерізу при розтягу та стиску*, він характеризує одночасно фізико-механічні властивості матеріалу та геометричні розміри поперечного перерізу бруса. Цю формулу читають так: *абсолютне видовження або укорочення бруса прямо пропорційне поздовжній силі, довжині й обернено пропорційне жорсткості перерізу бруса*.

Наведені формули закону Гука стосуються тільки брусів або їх ділянок сталого поперечного перерізу, виготовлених з одного матеріалу, при сталій поздовжній силі. Для бруса, що має декілька ділянок, які відрізняються матеріалом, величиною поздовжньої сили та розмірами поперечного перерізу, а зміна довжини всього бруса дорівнює алгебраїчній сумі подовжень і укорочень окремих ділянок:

$$\Delta \ell = \sum_{i=1}^n \Delta \ell_i = \sum_{i=1}^n (N_i \ell_i / EA_i) \quad (2.5)$$

або в інтегральному вигляді

$$\Delta \ell = \int_0^{\ell} (N(\ell) \cdot d\ell / E \cdot A(\ell)), \quad (2.6)$$

де $N(\ell)$, $A(\ell)$ – відповідні функції поздовжній сили й площі поперечного перерізу вздовж довжини бруса ℓ .

Приклад 2.2. На сталений ступінчастий брус ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа) діють сили $P = 20$ кН і $T = 30$ кН (рис. 2.4). Площі поперечних перерізів $A_1 = 400$ мм², $A_2 = A_3 = 800$ мм². Довжини ділянок вказано на рисунку 1.9; $a = 0,2$ м. Побудувати епюри поздовжніх сил і нормальних напружень. Визначити зміну довжини бруса.

Розв'язання. Визначаємо поздовжні сили й нормальні напруження на кожній ділянці:

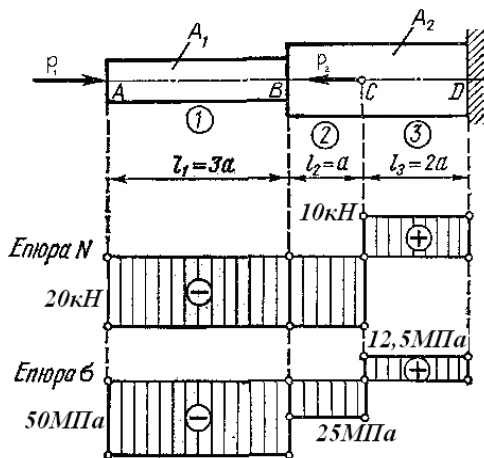


Рисунок 2.4

ділянка AB :

$$N_1 = -P = -20 \text{ кН};$$

$$\sigma_1 = N_1 / A_1 = -50 \text{ МПа};$$

ділянка BC :

$$N_2 = -P = -20 \text{ кН};$$

$$\sigma_2 = N_2 / A_2 = -25 \text{ МПа};$$

ділянка CD :

$$N_3 = -P + T = 10 \text{ кН};$$

$$\sigma_3 = N_3 / A_2 = 12,5 \text{ МПа}.$$

Будуємо епюри N і напружень σ .

Обчислюємо деформації ділянок:

$$\begin{aligned} \Delta \ell_1 &= N_1 \ell_1 / E A_1 = \sigma_1 \ell_1 / E = \\ &= -50 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 0,2 / 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 = \\ &= -0,15 \cdot 10^{-3} (\text{м}) = -0,15 \text{ мм}; \end{aligned}$$

$$\Delta \ell_2 = N_2 \ell_2 / E A_2 = \sigma_2 \ell_2 / E = -25 \cdot 10^6 \cdot 0,2 / 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 = -0,025 \cdot 10^{-3} (\text{м}) = -0,025 \text{ мм};$$

$$\Delta \ell_3 = N_3 \ell_3 / E A_3 = \sigma_3 \ell_3 / E = 12,5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 0,2 / 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 = 0,025 \cdot 10^{-3} (\text{м}) = 0,025 \text{ мм}.$$

Загальна деформація бруса

$$\Delta \ell = \Sigma(\Delta \ell_i) = -0,15 - 0,025 + 0,025 = -0,15 (\text{мм}).$$

Отже, брус укоротиться на 0,15 мм.

2.3 Поперечна деформація розтягу та стиску

Досвід доводить, що поперечні розміри перерізу *при розтягу зменшуються, а при стиску збільшуються*. Це характерно для розтягу і стиску всіх матеріалів. На дослідах встановлено, що при одновісному розтягуванні або стисканні відношення відносних поперечних і поздовжніх деформацій для певного матеріалу є величина стала. Залежність між відносною поперечною ε' і відносною поздовжньою ε

деформаціями вперше встановив французький вчений Пуассон. Ця залежність має такий вигляд:

$$|\varepsilon'| = \mu |\varepsilon|, \quad (2.7)$$

де μ – коефіцієнт поперечної деформації, або коефіцієнт Пуассона, який залежить від матеріалу та характеризує його пружні властивості.

Зауважимо, що і поздовжня, і поперечна деформації – лінійні деформації. Наведемо значення μ для деяких матеріалів: корок – 0,00; латунь – (0,32–0,42); чавун – (0,23–0,27); свинець – 0,42; сталь – (0,24–0,30); каучук – 0,47; мідь – (0,31–0,34); парафін – 0,5.

2.4 Діаграма розтягу маловуглецевої сталі

Механічні характеристики матеріалів, тобто величини, які характеризують їхню міцність, пластичність, пружність, твердість, а також пружні сталі величини E і μ , які потрібні конструктору для вибору матеріалів та розрахунків деталей, визначають за допомогою механічних випробувань стандартних зразків, виготовлених із досліджуваного матеріалу. Розглянемо діаграму, отриману в процесі найпоширенішого і найважливішого механічного випробування, а саме випробування на розтяг маловуглецевої сталі (наприклад сталі Ст 3) при статичному навантаженні. Для випробувань на розтяг застосовують розривні машини. З випробуваного матеріалу виготовляють спеціальні зразки. У процесі випробування спеціальний пристрій випробувальної машини автоматично креслить діаграму в координатах $P - \Delta\ell$, яка показує залежність між розтягувальною силою P і абсолютним видовженням $\Delta\ell$ зразка. Для вивчення механічних властивостей матеріалу незалежно від розмірів зразка застосовують також діаграму в координатах «напруження σ – відносне видовження ε ». Ці діаграми відрізняються одна від одної тільки масштабами.

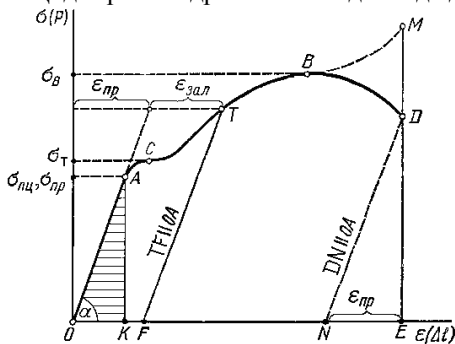


Рисунок 2.5

Діаграму розтягу маловуглецевої сталі в координатах $\sigma - \varepsilon$ подано на рисунку 2.5. Ця діаграма має такі характерні точки.

Точка A відповідає межі пропорційності.

Межею пропорційності $\sigma_{пц}$ називають таке найбільше напруження, до якого деформації зростають пропорційно на-

вантаженню, тобто відповідно до закону Гука (для сталі Ст3 напруження $\sigma_{пц} = 200$ МПа). Точка *A* практично відповідає також іншій межі, яку називають межею пружності. *Границею пружності* $\sigma_{пр}$ називають таке найбільше напруження, до якого деформації практично залишаються пружними. Точка *C* відповідає межі текучості. *Межею текучості* $\sigma_{т}$ називають таке напруження, при якому у зразку виникає помітне видовження без збільшення навантаження (для сталі Ст3 напруження $\sigma_{т} = 240$ МПа). Коли деформація досягає межі текучості, поверхня зразка стає матовою, бо на ній з'являється сітка ліній Людерса – Чернова, нахилених до його осі під кутом 45° . *Межа текучості* – це головна механічна характеристика для оцінки міцності пластичних матеріалів. Точка *B* відповідає тимчасовому опору або межі міцності. *Тимчасовим опором* (або *межею міцності*) $\sigma_{в}$ називають умовне напруження, що дорівнює відношенню максимальної сили, яку витримує зразок, до початкової площі його поперечного перерізу (для сталі Ст3 $\sigma_{в} = 400$ МПа).

Коли деформація досягає тимчасового опору, то на розтягнутому зразку утворюється місцеве звуження – шийка, тобто починається руйнування зразка. В означенні тимчасового опору йдеться про умовне напруження, оскільки в перерізах шийки площа перерізу зменшується, а дійсні напруження збільшуються. Границя міцності є основною механічною характеристикою для оцінки міцності *крихких* матеріалів.

Точка *D* відповідає напруженням, які виникають у зразку в усіх поперечних перерізах в момент розриву, крім перерізу шийки.

За допомогою діаграми розтягу в координатах (σ , ε) визначається модуль пружності першого роду ($E = \operatorname{tg} \alpha = AK/OK$). Деформація зразка за границею пружності (наприклад, точка *T* діаграми) складається з пружної $\varepsilon_{пр}$ і залишкової $\varepsilon_{зал}$ деформацій. Якщо в точці *T* діаграми навантаження зняти, то зразок укоротиться відповідно до прямої *TF* діаграми. При повторному навантаженні того самого зразка його деформація відповідатиме діаграмі *FTBD*. Отже, *при повторному розтягуванні* зразка, раніше навантаженого більше, ніж межа пружності, механічні властивості матеріалу змінюються, а саме *підвищується міцність* (межа пружності $\sigma_{пр}$ і пропорційності $\sigma_{пц}$) і *зменшується пластичність*. Це явище називають наклепом.

Наприклад дрiт, який витягують волочінням, унаслідок наклепу має значно більшу міцність, ніж стандартний точений зразок з того самого матеріалу.

Ступінь пластичності матеріалу можна охарактеризувати величиною (у процентах) залишкового відносного подовження δ і залишкового відносного звуження ψ шийки зразка після розриву:

$$\delta = [(\ell_p - \ell_o) / \ell_o] \cdot 100\%; \quad \psi = [(A_o - A_{ш}) / A_o] \cdot 100 \%,$$

де ℓ_o – початкова довжина зразка;

ℓ_p – довжина зразка після розриву;

A_o – початкова площа поперечного перерізу зразка,

$A_{ш}$ – площа найменшого поперечного перерізу шийки зразка після розриву.

Чим більші δ і ψ , тим пластичніший матеріал. Матеріали, які мають дуже малу пластичність, називають крихкими. Діаграма розтягу крихких матеріалів не має переходу текучості, в них при руйнуванні шийка не утворюється.

Діаграма стиску сталі до границі текучості збігається з діаграмою розтягу, до того ж результати випробування сталі на розтяг і стиск однакові. Результати випробувань на розтяг і стиск чавуну значно відрізняються; його границя міцності на розтяг у 3–5 разів менша, ніж на стиск. Інакше кажучи, *чавун значно гірше працює на розтяг, ніж на стиск*.

Зазначимо, що чітко виражену площадку текучості мають тільки діаграми розтягу маловуглецевої сталі й деяких сплавів кольорових металів. На рисунку 2.6 зображено для порівняння діаграми розтягу сталей з різним вмістом вуглецю. З рисунка видно, що із збільшенням процента вмісту вуглецю (Ст4, Ст6) збільшується міцність сталі й зменшується її пластичність.

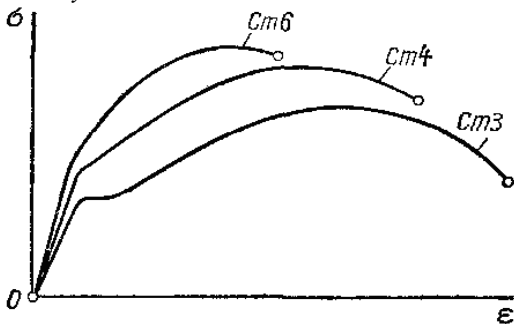


Рисунок 2.6

Для пластичних матеріалів, діаграми розтягу яких не мають чітко вираженої площадки текучості (середньо- і високовуглецеві, легovanі сталі) або зовсім її не мають (мідь, дюралюміній), вводиться поняття умовної межі текучості – напруження, при якому відносне залишкове видовження зразка дорівнює зазвичай 0,2 %. Таку границю текучості іноді позначають $\sigma_{0,2}$.

Таку границю текучості іноді позначають $\sigma_{0,2}$.

Варто зазначити, що поділ матеріалів на пластичні й крихкі досить умовний, оскільки залежно від особливостей зовнішнього навантаження крихкий матеріал може набути пластичних властивостей і, навпаки, пластичний матеріал набуває властивостей крихкого. Так, наприклад, деталь з пластичного матеріалу за низької температури або при ударному навантаженні руйнується без утворення шийки, як крихка.

2.5 Розрахункова формула на міцність для розтягу (стиску)

За допомогою механічних випробувань встановлюють граничні напруження, при яких відбувається порушення роботи або руйнування деталей конструкцій. Граничним напруженням при статичному навантаженні *для пластичних матеріалів є межа текучості σ_t , для крихких – границя міцності σ_b* . Для пластичних матеріалів при таких напруженнях спостерігаються помітні залишкові деформації, а для крихких матеріалів можливе руйнування. Тобто такі напруження не можна вважати припустимими.

Міцність деталей забезпечуватиметься за умови, що напруження, які виникають в деталях у процесі експлуатації, будуть менші від граничних.

Відношення граничного напруження σ_{gr} до робочого напруження $\sigma_{роб}$, яке виникає у процесі роботи деталі, називають *коефіцієнтом запасу міцності*:

$$n = \sigma_{gr} / \sigma_{роб}. \quad (2.8)$$

Очевидно, що малий коефіцієнт запасу міцності не забезпечить надійності конструкції, а надмірний запас міцності призведе до перевитрат матеріалу та збільшення ваги конструкції. Переріз, для якого коефіцієнт запасу міцності найменший, називають небезпечним. Мінімально необхідний коефіцієнт запасу міцності називають припустимим і позначають $[n]$.

Таблиця 2.2

Матеріал	Припустимі напруження $[\sigma]$, МПа	
	Розтяг 2	Стиск 3
1		
Чавун сірий	28–80	120–150
Сталь вуглецева конструкційна	60–250	
Сталь легована конструкційна	100–400 і більше	
Мідь	30–120	
Латунь	70–140	
Бронза	60–120	

Продовження таблиці 2.2

1	2	3
Дюралюміній	80–150	
Текстоліт	30–40	50–90
Дуб (уздовж волокон)	9–13	13–15
Цегляна кладка	До 0,2	0,6–2,5
Бетон	0,1–0,7	1–9

Припустимий коефіцієнт запасу міцності залежить від властивостей, якості й однорідності матеріалу, можливих навантажень, які діють на конструкцію, важливості конструкції, точності розрахунку та багатьох інших причин.

На практиці зазвичай приймають такі:

- для пластичних матеріалів $[n] = 1,2\text{--}2,5$;
- для крихких $[n] = 2\text{--}5$;
- для деревини $[n] = 8\text{--}12$.

Відношення граничного напруження до допустимого коефіцієнта запасу міцності називають *припустимим напруженням* і позначають як $[\sigma]$:

$$[\sigma] = \sigma_{cp} / [n]. \quad (2.9)$$

Величини припустимих напружень на розтяг і стиск для деяких матеріалів подано в таблиці 2.2.

Умова міцності деталі конструкції полягає у тому, що максимальні робочі напруження, які виникають у деталі, не повинні перевищувати припустимі:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]. \quad (2.10)$$

Умову міцності можна записати в іншому вигляді:

$$n \geq [n]. \quad (2.11)$$

Отже, розрахунковий коефіцієнт запасу міцності не повинен бути меншим від припустимого. Розрахункова формула для розтягу (стиску) має такий вигляд:

$$\sigma_{\max} = N/A \leq [\sigma]. \quad (2.12)$$

Тобто *нормальне напруження в небезпечному перерізі не повинно перевищувати припустиме напруження*.

У розрахунках конструкцій на міцність розглядають три різновиди задач, які відрізняються формою застосовування розрахункової формули:

1) проектний розрахунок, при якому визначають розміри небезпечного перерізу

$$A \geq N_{\max} / [\sigma]; \quad (2.13)$$

2) перевірний розрахунок, при якому визначають робоче напруження та порівнюють його з припустимим

$$\sigma_{\max} = N/A \leq [\sigma]; \quad (2.14)$$

3) визначають припустиме навантаження

$$N \leq A \cdot [\sigma]; \quad (2.15)$$

4) іноді для забезпечення нормальної роботи розміри деталей вибирають так, щоб виконувалась умова жорсткості, котра для розтягу (стиску) має вигляд

$$\Delta \ell \leq [\Delta \ell], \quad (2.16)$$

де $\Delta \ell$ – зміна довжини деталі, яка обчислюється за формулами (2.4) або (2.5);

$[\Delta \ell]$ – припустиме значення цієї величини.

Нагадаємо, що розрахунок за умовою жорсткості завжди потрібно доповнювати розрахунком на міцність за формулою (2.10).

Приклад 2.3. Визначити розмір квадратного перерізу дерев'яного підкосу BC конструкції, що зображена на рисунку 2.7, якщо $P = 5 \text{ кН}$, $[\sigma] = 6 \text{ МПа} = 6 \text{ Н/мм}^2$, $a = 1 \text{ м}$. Масою частин

конструкції знехтувати, кріплення у точках A , B і C вважати ідеальними шарнірами.

Розв'язання. З теоретичної механіки відомо, що коли прямолінійний невагомий стрижень закріплено двома кінцями з шарнірами й навантажено тільки на кінцях, то його реакція напрямлена вздовж стрижня. Отже, реакція R стрижня BC , що підтримує брус AB , напрямлена вздовж стрижня угору. На стрижень BC діє сила R' (сила тиску бруса AB). Отже, у поперечних перерізах стрижня виникатимуть тільки поздовжні сили $N = R'$, і він зазнаватиме деформації стиску, до того ж, згідно з третім законом Ньютона, $R' = R$.

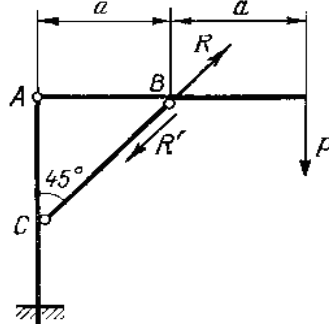


Рисунок 2.7

Щоб визначити реакцію R , розглянемо рівновагу бруса АВ. Оскільки реакція шарніра A нас не цікавить, то складемо одне рівняння рівноваги, а саме:

$$\sum M_A = 0 \quad \text{або} \quad -P \cdot 2a + R \cdot a \cdot \sin 45^\circ = 0.$$

Звідси

$$R = 2 \cdot 50,707 = 14,2 \text{ (кН)}.$$

Далі скористаємось розрахунковим виразом міцності для стиску і визначимо площу A поперечного перерізу підкосу BC :

$$A \geq N_{\max} / [\sigma]$$

або

$$A \geq 14,2 \cdot 10^3 / 6 = 2370 \text{ мм}^2.$$

Оскільки підкіс BC має квадратний переріз, то $A = b^2$, отже, отримаємо $b \geq 48,6 \text{ мм}$. Округляємо в бік збільшення до стандартного значення і приймаємо $b = 50 \text{ мм}$.

2.6 Статично невизначені задачі. Вплив температури

Задачі на розрахунок конструкцій, в елементах яких внутрішні силові фактори не можна визначити з рівнянь рівноваги статички, називають *статично невизначеними*. У таких системах в'язів більше ніж потрібно для рівноваги. Отже, деякі в'язі так би мовити зайві, а зусилля в них – зайві невідомі. Зайвими такі в'язі називають тому, що вони не потрібні для забезпечення геометричної незмінності та рівноваги конструкції, але з умов міцності й жорсткості зайві в'язі можуть стати необхідними. За кількістю зайвих в'язів або зайвих невідомих зусиль установлюють ступінь статичної невизначеності системи. Коли є одна зайва невідома, конструкцію називають один раз статично невизначеною, при двох – двічі статично невизначеною тощо.

Для розв'язання таких задач до рівнянь статички додають *рівняння переміщень*. У цьому разі розглядають систему в деформованому стані, що дає змогу встановити зв'язки між деформаціями або переміщеннями окремих елементів конструкції. Ці рівняння називають рівняннями *сумісності деформацій*. Далі, на підставі закону Гука виражають деформації або переміщення через невідомі зусилля. У разі зміни температури до деформацій, спричинених зусиллями, додають температурні деформації.

При дії температури на статично визначені системи спостерігаємо вільні деформації стрижня за відсутності напружень. Так, якщо приріст температури здійснюється рівномірно на $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$, а довжина стрижня ℓ , то його температурне видовження буде таке:

$$\Delta \ell_t = \alpha \cdot \Delta t \cdot \ell, \quad (2.17)$$

де α – коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу стрижня;

t_2, t_1 ($^{\circ}\text{C}$) – кінцева й початкова температура в градусах.

Наведемо приклади розв'язання статично невизначених задач.

Приклад 2.4. Визначити температурні напруження в невагомому жорстко закріпленому стрижні при рівномірному нагріванні на Δt градусів (рис. 2.8). Довжина стрижня ℓ , площа перерізу F , модуль пружності матеріалу E .

Розв'язання. При підвищенні температури стрижень намагається видовжитися. Цьому перешкоджають жорсткі опори A і B . При цьому виникають реакції R_A і R_B , які спрямовані вздовж осі стрижня.

Складемо рівняння рівноваги стрижня:

$$\sum x = 0; R_A - R_B = 0; \quad R_A = R_B = R.$$

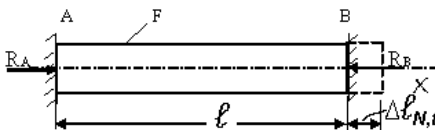


Рисунок 2.8

Отже, задача один раз статично невизначена. Унаслідок жорсткого закріплення стрижня його довжина ℓ не зміниться, через що скорочення стрижня від поздовжньої сили N повинно дорівнювати його видовженню при нагріванні:

$$\Delta \ell_N = \Delta \ell_t.$$

Згідно з пунктом 2.1 поздовжня сила у всіх перерізах однакова, від'ємна за знаком і дорівнює за величиною реакції, тобто $N = -R$.

Температурне видовження $\Delta \ell_t = \alpha \Delta t \ell$, де α – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу стрижня. Укорочення під дією реакції $\Delta \ell_N = R \ell / (EF)$. Прирівнюємо деформації

$$R \ell / (EF) = \alpha \Delta t \ell$$

або

$$R = \alpha \Delta t EF, \quad N = -R = -\alpha \Delta t EF.$$

Визначаємо температурні напруження: $\sigma_t = N/F = -\alpha \Delta t E$.

Як виявилось, при нагріванні в перерізі стрижня з защемленими кінцями з'являються напруження стиску, які пропорційні приросту температури стрижня.

Щоб не виникали температурні напруження у процесі будівництва мостів, один кінець моста ставлять на котки; у трубопроводах, що зазнають зміни температури, роблять компенсувальні пристрої тощо.

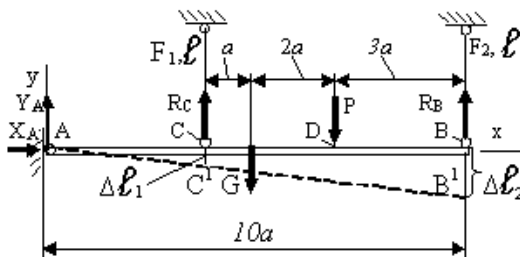


Рисунок 2.9

Приклад 2.4.

Жорстка балка АВ (рис. 2.9), вага якої $G = 40 \text{ кН}$, шарнірно закріплена горизонтально й утримується двома сталевими стрижнями, що мають однакову довжину $\ell = 2 \text{ м}$. На

балку діє сила $P = 20 \text{ кН}$. Площі поперечних перерізів стержнів дорівнюють відповідно $F_1 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ і $F_2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$. Модуль пружності матеріалу стрижнів (сталь) $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. Визначити зусилля у стрижнях, а також напруження, що виникають у них.

Розв'язання. Продемонструємо реакції таких в'язей: X_A , Y_A , R_C , R_B . Для системи сил на площині можна записати *три рівняння рівноваги*, а саме суми проекцій сил на осі координат x і y й суму моментів сил відносно якоїсь точки, а *невдомих реактивних сил – чотири*. Отже, *система один раз статично невизначена*, оскільки кількість невідомих перевищує кількість рівнянь статки на одиницю. Оскільки реакції шарніра А нас не цікавлять, то запишемо тільки одне рівняння рівноваги, а саме суму моментів сил відносно точки А:

$$\sum M_A = R_C \cdot 4a - G \cdot 5a - P \cdot 7a + R_B \cdot 10a = 0 \quad (2.18)$$

і додаємо додаткове рівняння деформацій, яке одержимо, розглядаючи залежність між недеформованою системою АСВ і деформованою АС¹В¹. З рисунку 2.9 видно, що деформації стрижнів при навантаженні дорівнюють $\Delta \ell_1$ і $\Delta \ell_2$. Трикутники АСС¹ і АВВ¹ подібні, отже, маємо

$$\Delta \ell_1 / 4a = \Delta \ell_2 / 10a. \quad (2.19)$$

За законом Гука

$$\Delta \ell_1 = R_C \ell / (EF_1), \quad \Delta \ell_2 = R_B \ell / (EF_2). \quad (2.20)$$

Вирішуючи разом рівняння (2.18), (2.19), (2.20) і враховуючи вихідні дані, знаходимо таке:

$$R_C = 6,3 \text{ кН}; \quad R_B = 31,5 \text{ кН}.$$

Обчислюємо напруження в стрижнях: $\sigma_1 = R_C / F_1 = 31,5 \text{ МПа}$,
 $\sigma_2 = R_B / F_2 = 78,8 \text{ МПа}$.

2.7 Зминання

Якщо деталі конструкцій, які передають значне навантаження, мають невелику площу контакту, то поверхні цих деталей можуть *зминатися*. Щоб цього не сталося, наприклад, під гайки й головки болтів підкладають шайби. Для спрощення розрахунків вважають, що при площинному контакті виникають нормальні напруження зминання, що рівномірно розподілені по площі контакту. Розрахункове рівняння при зминанні має такий вигляд:

$$\sigma_{зм} = P / F_{зм} \leq [\sigma]_{зм}, \quad (2.21)$$

де $\sigma_{зм}$ – розрахункові напруження зминання;

P – стискальна сила;

$[\sigma]_{зм}$ – допустиме напруження на зминання;

$F_{зм}$ – площа зминання.

Для деталей, які контактують циліндричними поверхнями (наприклад, заклепочне з'єднання, ось і підшипник), закон розподілу напружень зминання по поверхні контакту складний. Тоді в розрахункову формулу умовно приймають площу діаметрального перерізу осі, тобто

$$F_{зм} = d \cdot s, \quad (2.22)$$

де d – діаметр осі;

s – найменша товщина з'єднаних деталей.

Якщо деталі, що контактують, виготовлені з різних за твердістю матеріалів, то на зминання перевіряється більш м'який матеріал.

Приклад 2.5. Тяга 2 шарнірно з'єднана з вилкою 1 (рис. 2.10) за допомогою осі 3.

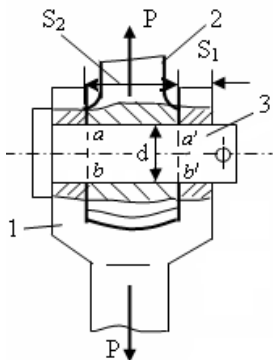


Рисунок 2.10

з якого обчислюємо діаметр осі:

$$d \geq P / (S_2 [\sigma]_{зм}) = 32 \cdot 10^3 / (22 \cdot 120) = 12,2 \text{ мм.}$$

Округлюємо в бік збільшення до стандартного значення й приймаємо діаметр осі $d = 14 \text{ мм}$.

2.8 Потенціальна енергія деформації

При статичному навантаженні при розтягу (стиску) силою P (рис. 2.5) стрижень подовжується (скорочується) на величину $\Delta \ell$ і при цьому виконується робота A , яка перетворюється зазвичай на потенціальну енергію U деформації тіла. Незначна її частина, якою, звичайно, нехтують, розсіюється здебільшого у вигляді теплоти. Оскільки при статичному навантаженні кінетична енергія системи залишається незмінною, то виконується рівність $A = U$.

Якщо діаграма (див. п. 2.4) побудована в координатах $P - \Delta \ell$, то площа діаграми дорівнює роботі деформації стрижня. Робота при руйнуванні стрижня дорівнює площі фігури ОАСBDN діаграми.

При пружному деформуванні робота A та енергія U знаходяться так

$$A = U = P \Delta \ell / 2 = P^2 \ell / (2EF), \quad (2.23)$$

де $\Delta \ell = P \ell / (EF)$ – подовження стрижня сталого перерізу, довжина якого ℓ , площа перерізу F , модуль пружності матеріалу E .

Значення потенціальної енергії деформації, яке припадає на одиницю об'єму тіла, називають *питомою потенціальною енергією деформації* та позначають u .

Конструкція навантажена силами $P = 32 \text{ кН}$. Визначити діаметр осі d зі сталі, якщо $S_1 = 12 \text{ мм}$, $S_2 = 22 \text{ мм}$, а допустиме напруження на зминання $[\sigma]_{зм} = 120 \text{ МПа}$.

Розв'язання. Умовна площа зминання менш для тяги 2, оскільки що $2S_1 = 24 \text{ мм} > S_2 = 22 \text{ мм}$. Приймаємо для розрахунку меншу площу зминання

$$F_{зм} = d \cdot S_2.$$

Записуємо розрахункове рівняння при зминанні:

$$\sigma_{зм} = P / F_{зм} = P / (d \cdot S_2) \leq [\sigma]_{зм}$$

Питома потенціальна енергія деформації

$$u = U/V = P \Delta \ell / (2 F \ell) = \sigma \varepsilon / 2, \quad (2.24)$$

де $V = F \ell$ – об'єм стрижня.

Зважаючи, що $\varepsilon = \sigma/E$ (закон Гука – формула (1.2.3)),

$$u = \sigma^2 / (2E) = \varepsilon^2 E / 2. \quad (2.25)$$

Потенціальна енергія деформації вимірюється в одиницях роботи – джоулях (Дж).

При одночасній дії декількох сил, або при зміні розмірів перерізу стрижня потенціальну енергію деформації знаходять як суму потенціальних енергій окремих ділянок

$$U = \sum U_i = \sum u_i V_i = \sum \sigma_i^2 V_i / (2E), \quad (2.26)$$

де σ_i – нормальне напруження у поперечних перерізах на кожній ділянці;

V_i – об'єм кожної ділянки.

Тобто потенціальна енергія деформації – величина завжди додатна оскільки вона залежить від квадрату напружень або квадрату поздовжніх сил.

Контрольні запитання до розділу 2

1. Як обчислюється поздовжня сила в поперечному перерізі бруса?
2. За якою формулою визначають напруження в поперечному перерізі стрижня при його поздовжньому деформуванні?
3. Як розраховують відносне видовження при розтягу (стиску)?
4. Сформулюйте закон Гука при розтягу (стиску).
5. Як називається коефіцієнт пропорційності між напруженнями й деформаціями при розтягу (стиску) і що він характеризує? В яких одиницях його вимірюють?
6. Як обчислюють видовження чи скорочення стрижня, що має декілька ділянок, при розтягу (стиску)?
7. Запишіть інтегральну формулу, яка визначає видовження чи скорочення стрижня при розтягу (стиску)?
8. Сформулюйте залежність між відносною поперечною й відносною поздовжньою деформаціями при розтягу (стиску).
9. Сформулюйте, що називається: границею пропорційності, границею текучості, тимчасовим опором або границею міцності?
10. Як визначається модуль пружності першого роду за допомогою діаграми розтягу?
11. Що називають наклепом?

11. Як визначається і позначається границя текучості матеріалів, діаграма розтягу яких не має чітко вираженої площадки текучості?
12. Сформулюйте, як визначається: коефіцієнт запасу міцності, допустиме напруження?
13. Як записується умова міцності за допустимими напруженнями?
14. Як записується умова міцності, якщо відомі розрахунковий і допустимий коефіцієнти запасу міцності?
15. Який вигляд має розрахункова формула для розтягу (стиску), що визначає розміри небезпечного перерізу?
16. Як записується умова жорсткості для розтягу (стиску)?
17. Яка механічна система називається статично невизначеною і чому?
18. Як у найпростіших випадках розкривається статична невизначеність?
19. Яка механічна система називається статично невизначеною і чому?
20. Як у найпростіших випадках розкривається статична невизначеність?
21. Як записується умова міцності за допустимими напруженнями при зминанні?
22. Як визначається площа зминання для деталей, які контактують циліндричними поверхнями?

3 ЗСУВ (ЗРІЗ)

3.1 Напруження й деформації зсуву

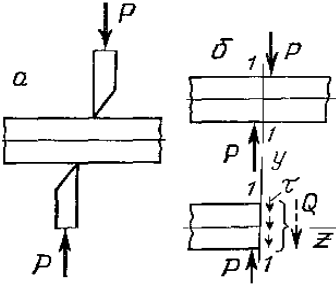


Рисунок 3.1

Зсувом називають такий різновид деформації, коли в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає лише поперечна сила Q . Деформацію зсуву можна спостерігати, наприклад, під час різання ножицями металевих штаб або прутків (рис. 3.1).

Розглянемо брус, перпендикулярно до осі якого прикладено дві однакові, але протилежно напрямлені сили P , лінії дії яких паралельні й проходять на відносно невеликій відстані одна від одної. Для визначення поперечної сили Q застосуємо метод перерізів (рис. 3.1).

В усіх точках поперечного перерізу діятимуть розподілені сили, рівнодіючу яких визначимо з умови рівноваги залишеної частини бруса:

$$\sum Y = 0 \text{ або } P - Q = 0,$$

звідки визначимо поперечну силу Q : $Q = P$.

Поперечна сила – це рівнодіюча внутрішніх дотичних сил, що діють на зсув у поперечному перерізі. Природно вважати, що при зсуві в поперечному перерізі бруса діють тільки дотичні напруження τ . Припускаємо, що ці напруження розподілені по перерізу рівномірно й, отже, їх можна обчислити за формулою

$$\tau = Q/A, \quad (3.1)$$

де A – площа перерізу.

Очевидно, що при зсуві форма перерізу на величину напруження не впливає.

Примітка. Викладений у цьому параграфі розрахунок дотичних напружень при зсуві наближений, оскільки лінії дії сил P (рис. 3.1) напрямлені не по одній прямій і, точно кажучи, ці сили не утворюють врівноважену систему сил, це – пара сил. Проте момент цієї пари невеликий (мале плече) і відповідними їй напруженнями можна знехтувати.

3.2 Розрахункова формула для зсуву

Умова міцності деталі конструкції на зсув полягає в тому, що найбільше напруження (робоче напруження), яке виникає в деталі, не повинно бути більше від допустимого напруження. Розрахункова формула для зсуву така:

$$\tau = Q/A \leq [\tau]_{зр}, \quad (3.2)$$

тобто *дотичні напруження при зсуві не повинні бути більшими від допустимих напружень на зріз*. За цією формулою роблять проектний розрахунок, розрахунки під час перевірки міцності й визначають допустиме навантаження.

Деформацію зсуву, доведену до руйнування матеріалу, називають зрізом (стосовно металевих деталей) або сколюванням (стосовно неметалевих конструкцій). Допустиме напруження на зріз для пластичних матеріалів вибирають залежно від межі текучості σ_m або від допустимих напружень на розтяг $[\sigma]$.

У машинобудуванні для штифтів, болтів і шпонок приймають

$$[\tau]_{зр} \approx (0,25-0,35) \sigma_r \approx (0,6-0,8) [\sigma].$$

Приклад 3.1. Визначити діаметр осі 3 (рис. 2.10) за умови міцності на зріз, якщо припустимі напруження $[\tau]_{зр} = 80$ МПа.

Розв'язання. У цьому з'єднанні руйнування може бути внаслідок зсуву тяги 2 відносно вилки 1 вздовж перерізів $a-b$ і a^1-b^1 . Тобто площа зрізу дорівнює сумі площ поперечних перерізів $a-b$ і a^1-b^1 , що мають такий вигляд: $A_{зр} = 2 \pi d^2/4$.

Записуємо розрахункову формулу для зсуву (3.2):

$\tau = P/A \leq [\tau]_{зр}$, з якої знаходимо діаметр осі у такий спосіб:

$$d_{зр} \geq \sqrt{2P/(\pi[\tau]_{зр})} = \sqrt{2 \cdot 32 \cdot 10^3 / (\pi \cdot 80)} = 15,9 \text{ мм}.$$

Приймаємо з розрахунків на зминання й зсув більший діаметр осі і округлюємо його до стандартного ближнього $d = 16$ мм.

3.3 Деформація зсуву. Закон Гука

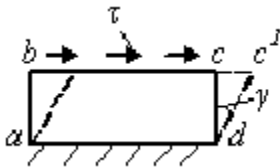


Рисунок 3.2
або відносним зсувом.

Розглянемо елемент бруса, що має вигляд паралелепіпеда, на грані якого діятимуть тільки дотичні напруження τ , а одну грань вважатимемо жорстко закріпленою (рис. 3.2). Деформація зсуву в цьому елементі полягає в перекошуванні прямих кутів і називається *кутом зсуву* γ

Відносний зсув, який характеризується величиною малого кута γ , можливо прийняти рівним відношенню cc^1/cd . Величина кута γ вимірюється у радіанах. Якщо матеріал відповідає закону Гука, то *дотичні напруження пропорційні відносному зсуву*, тобто виконується рівність

$$\tau = G \gamma. \quad (3.3)$$

Коефіцієнт пропорційності G характеризує жорсткість матеріалу при зсуві; його називають *модулем зсуву* або *модулем пружності другого роду*. Розмірність модуля пружності G однакова з розмірністю напружень (Па, МПа).

Зазначимо, що між трьома пружними сталими E , G і μ спостерігається залежність

$$G = E / [2 (1 + \mu)]. \quad (3.4)$$

Наприклад, для сталей, прийнявши $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu \approx 0,25$, матимемо

$$G \approx 2 \cdot 10^5 / [2 (1 + 0,25)] \approx 0,4 E \approx 8 \cdot 10^4 \text{ (МПа)}.$$

3.4 Закон парності дотичних напружень

Закон парності дотичних напружень формують так: *дотичні напруження у двох взаємно перпендикулярних площадках, які перпендикулярні до їхнього спільного ребра, однакові за модулем*.

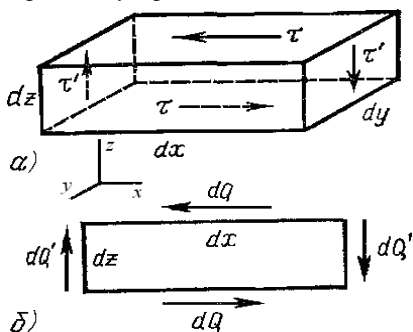


Рисунок 3.3

Усередині тіла біля певної точки виріжемо елементарний паралелепіпед, що має розміри dx , dy , dz (рис. 3.3). Нехай на верхній грані цього паралелепіпеда діє дотичні напруження τ . Сила, що діє в цій грані, дорівнюватиме

$$dQ = \tau dx dy.$$

Оскільки паралелепіпед перебуває в рівновазі, то $\Sigma X = 0$, отже, на нижній грані паралелепіпеда діятиме така сама сила dQ , але у протилежному напрямі. Ця пара сил (dQ , dQ) намагатиметься обертати паралелепіпед проти стрілки годинника (рис. 3.3). Оскільки паралелепіпед перебуває у рівновазі, то $\Sigma M_y = 0$, тому пара (dQ , dQ) зрівноважуватиметься

якоюсь іншою парою з моментом, що дорівнює моменту першої пари. Природно вважати, що другу пару утворюють дотичні напруження τ^1 , які діють на бокових (правій і лівій) гранях паралелепіпеда, до того ж $dQ^1 = \tau^1 dz dy$. Для рівноваги порівняємо моменти цих пар

$$dQ dz = dQ^1 dx$$

або

$$\tau dx dy dz = \tau^1 dz dy dx,$$

тобто

$$\tau = \tau^1.$$

Ця рівність – закон парності дотичних напружень.

Звернемо увагу на те, що парні дотичні напруження τ і τ^1 у двох взаємно перпендикулярних перерізах однакові за величиною та напрямлені або до лінії перетину площин, або від неї (рис. 3.3).

3.5 Напруження в похилих перерізах. Головні напруження

Через деяку точку деформованого тіла можна провести безліч січних площин. Розглянемо прямий брус сталого поперечного перерізу A , що розтягується силами P (рис. 3.4). Розріжемо брус площиною 1–1, що проходить через точку A й утворює з поперечним перерізом кут φ , відкинемо верхню частину й розглянемо рівновагу нижньої. Очевидно, що рівнодійна N внутрішніх сил, які діють у похилому перерізі, дорівнюватиме розтягувальній силі P .

Напруження p_φ будуть паралельні осі бруса (рис. 3.4) і розподілені по похилому перерізу рівномірно, тобто

$$p_\varphi = N/A_\varphi,$$

де $A_\varphi = A/\cos\varphi$ – площа похилого перерізу.

Нормальні напруження σ у поперечному перерізі

$$\sigma = N/A.$$

Знайдемо напруження в похилому перерізі

$$p_\varphi = N/A_\varphi = N/(A/\cos\varphi) = \sigma \cos\varphi.$$

Розкладемо повне напруження p_φ у точці похилого перерізу на нормальне σ_φ і дотичне τ_φ (рис. 3.4), тоді

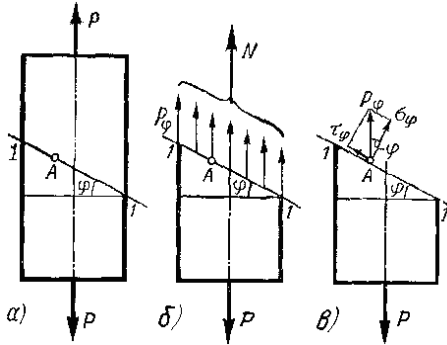


Рисунок 3.4

$$\begin{aligned}\sigma_\varphi &= p_\varphi \cos \varphi = \sigma \cos^2 \varphi, \\ \tau_\varphi &= p_\varphi \sin \varphi = (\sigma/2) \sin 2\varphi.\end{aligned}$$

Тобто

$$\begin{aligned}\sigma_\varphi &= \sigma \cos^2 \varphi, \\ \tau_\varphi &= (\sigma/2) \sin 2\varphi.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Звідси випливає таке: під час розтягу бруса в похилих перерізах виникають нормальні й дотичні напруження й відповідні цим напруженням деформації

розтягу і зсуву.

Розглянемо такі окремі випадки:

1. Якщо кут $\varphi = 0$, то $\sigma_\varphi = \sigma \cos^2 \varphi = \sigma = \sigma_{\max}$, $\tau_\varphi = (\sigma/2) \sin 2\varphi = 0$.

Нормальні напруження мають максимальне значення в поперечному перерізі, а дотичні напруження у поперечному перерізі дорівнюють нулю.

2. Коли $\varphi = 45^\circ$, то $\sigma_\varphi = \sigma \cos^2 \varphi = \sigma/2$, $\tau_\varphi = (\sigma/2) \sin 2\varphi = \sigma/2 = \tau_{\max}$.

Дотичні напруження досягають свого максимального значення в перерізах, нахилених до осі під кутом 45° .

Ці напруження є причиною виникнення на розтягнутому зразку сітки похилих ліній Людерса–Чернова, коли деформація досягає границі текучості.

3. Якщо $\varphi = 90^\circ$, то $\sigma_\varphi = \sigma_{\min} = 0$, $\tau_\varphi = 0$.

У поздовжніх перерізах бруса немає ні дотичних, ні нормальних напружень (цей висновок співпадає з гіпотезою про не натискання волокон (див. п. 1.2)).

Із зазначеного випливає, що коли йдеться про напруження у певній точці, то завжди необхідно вказувати положення січної площини, в якій ці напруження виникають. Сукупність нормальних і дотичних напружень, що виникають у безлічі площадок, які можуть проходити через цю точку, характеризує напружений стан у цій точці.

Площини, в яких дотичні напруження дорівнюють нулю, називають головними площадками, а нормальні напруження, що виникають у них, – головними напруженнями. Як доводить теорія пружності, у загальному випадку напруженого стану в ділянці досліджуваної точки може бути три взаємно перпендикулярні головні площадки. Залежно від кількості таких площадок розрізняють три

головних різновиди напруженого стану: *лінійний* (одновісний), *плоский* (двовісний) і *об'ємний* (тривісний) (рис. 3.5). Головні напруження позначаються $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, до того ж

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (3.6)$$

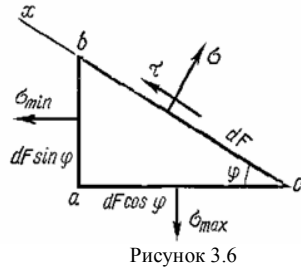
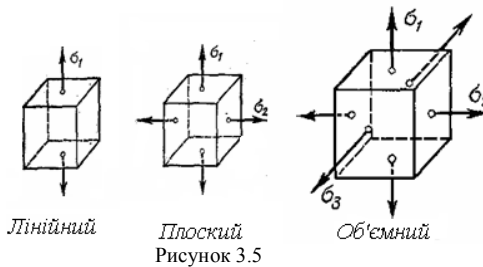
Очевидно, що в розглянутому випадку одновісного розтягу головні площадки розміщені в поперечному й поздовжньому перерізах, тобто взаємно перпендикулярні. Звернемо увагу також на те, що *головні напруження в певній точці мають максимальне і мінімальне значення*:

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \sigma, \quad \sigma_2 = \sigma_{\min} = 0.$$

Знайдемо залежність між головними напруженнями $\sigma_1 = \sigma_{\max}$, $\sigma_2 = \sigma_{\min}$ у двох взаємно перпендикулярних площадках для плоского напруженого стану.

Розглянемо рівновагу призми (рис. 3.6). Спроектуємо сили на вісь x :

$$\Sigma X = 0; \quad \tau dF + \sigma_{\min} dF \sin \varphi \cos \varphi - \sigma_{\max} dF \cos \varphi \sin \varphi = 0.$$



$$\text{Звідси} \quad \tau = [(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2] \sin 2\varphi = [(\sigma_1 - \sigma_2)/2] \sin 2\varphi.$$

Найбільші дотичні напруження виникають при $\varphi = 45^\circ$

$$\tau_{\max} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2 = (\sigma_1 - \sigma_2) / 2,$$

тобто, дотичні напруження мають максимальні значення для площадок, розташованих під кутом $\varphi = 45^\circ$ до головних площадок.

Якщо у випадку плоского напруженого стану біля певної точки знайти елементарний паралелепіпед так, щоб на його гранях діяли тільки рівні між собою дотичні напруження (рис. 3.3), то такий різновид напруженого стану називають *чистим зсувом* – з таким випадком ми зустрінемось при крученні круглого циліндра.

Контрольні запитання до розділу 3

1. Який різновид напруженого стану називається зсувом?
2. Як записується умова міцності деталі при зсуві?
3. Як формулюється закон Гука при зсуві?
4. Які абсолютні й відносні деформації відповідають зсуву?
5. Поясніть суть закону парності дотичних напружень?
6. Які напруження виникають в похилих перерізах під час розтягу бруса?
7. Які площадки називають головними? Які напруження виникають на цих площадках?

4 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

Досі вивчалися деформації, у яких напруження залежали тільки від площі поперечного перерізу. У деяких деформаціях міцність деталей залежить не тільки від величини площі поперечного перерізу, а й від його форми. Так, для вивчення деформацій кручення і згину потрібно знати також деякі інші геометричні характеристики плоских фігур.

4.1 Статичний момент площі

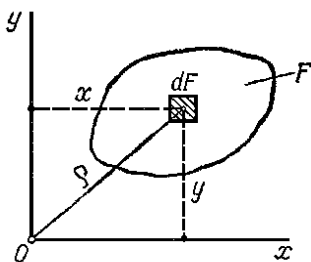


Рисунок 4.1

Статичним моментом площі плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площі суму добутків площ елементарних площадок на відстані їх від цієї осі (рис. 4.1). Статичний момент площі відносно осей Ox і Oy буде таким:

$$S_x = \int_F y dF; \quad S_y = \int_F x dF.$$

Статичний момент можна визначити також такими формулами:

$$S_x = \sum F_i y_i; \quad S_y = \sum F_i x_i, \quad (4.1)$$

де F_i , y_i , x_i – відповідно площа i -тої частини фігури й координати центра ваги її.

У теоретичній механіці було виведено такі формули для визначення координат центра ваги площі фігури:

$$x_C = \sum F_i x_i / F, \quad y_C = \sum F_i y_i / F,$$

де $F = \sum F_i$ – площа всієї фігури.

Вирази, які стоять у чисельниках правих частин цих формул, є статичними моментами площі фігури відносно осей y і x . Отже,

$$S_y = \int_F x dF = x_C F, \quad S_x = \int_F y dF = y_C F.$$

Статичний момент площі фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, дорівнює добутку площі фігури на відстань її центра ваги від цієї осі.

Одиниця вимірювання статичного моменту площі – $[S] = \text{м} \cdot \text{м}^2 = \text{м}^3$.

Статичний момент площі фігури може бути величиною додатною, від'ємною та дорівнювати нулю. Очевидно, що статичний момент площі відносно осі, яка проходить через центр ваги площі фігури (центральної осі), зокрема відносно осі симетрії фігури, дорівнює нулю.

У теоретичній механіці встановлено також, що в формулах для визначення координат центра ваги площі можна розуміти площі кінцевих частин фігури, а під x_i і y_i – координати центрів ваги цих частин (тобто застосовувати метод розбиття тощо). Звідси випливає, що для визначення статичного моменту площі складної фігури також можна застосовувати ті самі методи, тобто *визначати статичний момент усієї фігури як алгебраїчну суму статичних моментів окремих її частин*.

Поняття про статичний момент площі буде потрібне для визначення положення центрів ваги перерізів і для визначення дотичних напружень згину.

4.2 Полярний момент інерції

Полярним моментом інерції плоскої фігури відносно полюса, який лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площині суму добутків площ елементарних площадок на квадрати їхніх відстаней від полюса (рис. 4.2).

Полярний момент інерції позначатимемо J_p , що матиме такий вигляд:

$$J_p = \int \rho^2 dF. \quad (4.2)$$

Одиниця виміру полярного моменту інерції – м^4 .

Полярний момент інерції – величина завжди додатна та не дорівнює нулю.

Оскільки поняття полярного моменту інерції буде потрібне для вивчення деформацій кручення круглих валів, виведемо формули полярних моментів інерції круглого суцільного та кільцевого перерізів, приймаючи як полюс центри цих фігур.

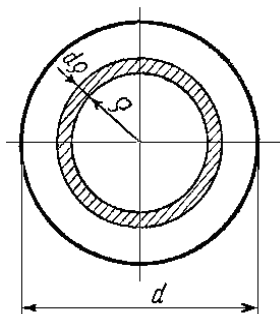


Рисунок 4.2

1. Круг діаметра d (рис. 4.2) такий:

$$J_p = \int_F \rho^2 dF = \int_0^{d/2} \rho^2 2\pi\rho d\rho = \pi d^4 / 32,$$

отже, $J_p = \pi d^4 / 32 \approx 0,1 d^4$.

2. Кільце, що має розміри $D \times d$, таке:

$$J_p = \int_{d/2}^{D/2} \rho^2 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4).$$

Тобто $J_p = \pi (D^4 - d^4) / 32 \approx 0,1 (D^4 - d^4)$.

4.3 Осьовий момент інерції

Осьовим моментом інерції плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площі суму добутків – площ елементарних площадок на квадрат їх відстаней від цієї осі. Осьовий момент інерції позначатимемо індексом, що відповідає осі

$$J_x = \int y^2 dF, \quad J_y = \int x^2 dF. \quad (4.3)$$

Видно, що осьовий і полярний моменти інерції виражають в однакових одиницях: м^4 .

Осьовий момент інерції – величина *завжди додатна і не дорівнює нулю*.

Додамо моменти інерції відносно двох перпендикулярних осей x і y (рис. 4.1), що матимуть такий вигляд:

$$J_x + J_y = \int_F y^2 dF + \int_F x^2 dF = \int_F (y^2 + x^2) dF = \int_F \rho^2 dF = J_p, \quad (4.4)$$

тобто *сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції відносно початку координат*.

Оскільки інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів, *момент інерції складної фігури, можна обчислити як суму моментів інерції простих фігур*, на які розбивають складну фігуру.

Поняття про осьові моменти інерції потрібне буде для вивчення теорії згину.

Обчислимо осьові моменти інерції таких фігур:

1. Прямокутник $b \times h$ (рис. 4.3).

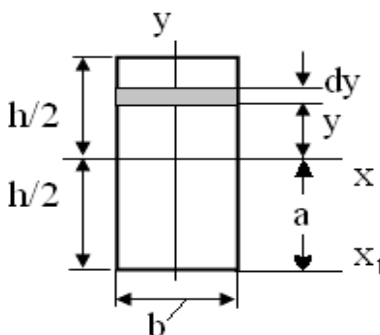


Рисунок 4.3

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = bh^3 / 12,$$

тобто $J_x = bh^3/12$, $J_y = b^3 h/12$.

2. Круг діаметром d (рис. 4.3) такий:

$$J_x + J_y = J_p = \pi d^4 / 32.$$

Отже $J_x = J_y = \pi d^4 / 64 \approx 0,05 d^4$.

3. Кільце, що має розміри $D \times d$ таке:

$$J_p = \pi(D^4 - d^4) / 64 \approx 0,05(D^4 - d^4).$$

4.4 Осьовий момент інерції для паралельних осей

Осі, які проходять через центр ваги фігури, називають *центральними*, а осьовий момент інерції відносно центральної осі називають *центральною моментом інерції*.

Нехай дано довільну плоску фігуру (рис. 4.4), площа якої F , центр ваги лежить у точці C , а осьовий момент інерції відносно центральної осі x буде J_x . Обчислимо момент інерції фігури відносно осі x_1 , яка паралельна центральної осі x і віддалена від неї на відстань a :

$$J_{x1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y+a)^2 dF = \int_F y^2 dF + 2a \int_F y dF + a^2 \int_F dF.$$

Перший доданок є моментом інерції відносно осі x , тобто J_x ; другий – статичний момент площі відносно осі x , який дорівнює нулю, бо вісь x – центральна; третій доданок після інтегрування дорівнює $a^2 F$. Отже, маємо

$$J_{x1} = J_x + a^2 F, \quad (4.5)$$

тобто момент інерції відносно будь-якої осі дорівнює центральному моменту інерції відносно осі, цієї даній, плюс добуток площі фігури на квадрат відстані між осями.

На підставі цього можна зробити висновок, що *осьовий момент інерції буде найменшим відносно центральної осі*.

Знайдемо формулу для обчислення моменту інерції прямокутника відносно осі x_1 (рис. 4.3):

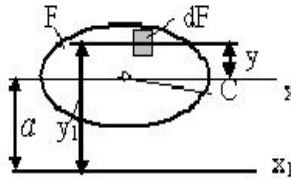


Рисунок 4.4

$$J_{x1} = J_x + a^2 F = b^3 h/12 + h^2 b h/4 = b h^3/3.$$

4.5 Головні осі й головні моменти інерції. Радіус інерції

Уявимо будь-яку плоску фігуру, моменти інерції якої відносно осей координат J_x і J_y , а полярний момент інерції відносно початку координат J_p . Згідно з (4.4) маємо

$$J_x + J_y = J_p.$$

Якщо осі координат повертати у площині фігури навколо початку координат, то полярний момент інерції залишиться незмінним, а осьові моменти інерції змінюватимуться, до того ж

$$J_x + J_y = \text{const.}$$

Якщо сума двох змінних величин залишається сталою, то одна з них зменшується, а друга збільшується. Отже, при якомусь положенні осей один із осьових моментів інерції досягає максимального, а другий – мінімального значень. Осі, відносно яких моменти інерції мають максимальне та мінімальне значення, називають *головними осями інерції*. Моменти інерції відносно головної осі називають *головним моментом інерції*.

Головна вісь, яка проходить через центр ваги, називається *головною центральною віссю*, а момент інерції відносно цієї осі – *головним центральним моментом інерції*.

Коли фігура має вісь симетрії, то ця вісь буде однією з головних центральних осей.

Осьові моменти інерції можна записати у вигляді добутка площі фігури F на квадрат певної величини:

$$J_x = F i_x^2; \quad J_y = F i_y^2,$$

де i_x, i_y – координати деякої точки фігури, які зветься *радіусами інерції площі* відносно відповідних осей координат x або y .

Тобто радіуси інерції площі знаходять за таких формулами:

$$i_x = \sqrt{J_x / F}; \quad i_y = \sqrt{J_y / F}. \quad (4.6)$$

Введемо також *відцентровий момент інерції* плоскої фігури, який дорівнює сумі добутків елементарних площ dF на добуток відстаней цих площадок до двох взаємно перпендикулярних осей x і y :

$$J_{xy} = \int_F xy \, dF. \quad (4.7)$$

Якщо осі x і y взаємно перпендикулярні або одна з них є віссю симетрії фігури, то відносно таких осей відцентровий момент дорівнює нулю.

Осьові моменти інерції та інші характеристики прокатних профілів наведено у відповідних стандартах.

Контрольні запитання до розділу 4

1. Що називається статичним моментом площі плоскої фігури? Його знаки та розмірність.
2. Чому дорівнює статичний момент площі плоскої фігури відносно центральної осі?
3. Як визначається статичний момент плоскої фігури відносно осі, якщо відомі координати центра ваги й площа фігури?
4. Які методи можна використовувати для визначення статичного моменту площі складної фігури?
5. Що називається полярним моментом інерції плоскої фігури відносно полюса? Його ознаки та розмірність.
6. Що називається осьовим моментом інерції плоскої фігури відносно осі? Його ознаки та розмірність.
7. Зв'язок між осьовими та полярними моментами інерції.

8. Як можна обчислити момент інерції складної фігури відносно осі?
9. Як можна обчислити момент інерції відносно будь-якої осі, якщо відомий центральний момент інерції відносно паралельної осі?
10. Що називається радіусом інерції площі відносно осі?
11. Як можна обчислити момент інерції площі відносно осі, якщо відомий радіус інерції її відносно цієї осі?
12. Що називається відцентровим моментом інерції плоскої фігури?

5 КРУЧЕННЯ

5.1 Відомості про деформацію кручення циліндра

Крученням називають такий різновид деформації, при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки *крутний момент*, який позначають T . Деформації кручення виникають, якщо до прямого бруса в площинах, перпендикулярних до осі, прикладена пара сил. Моменти цих пар називають обертальними (якщо брус обертається) і скручувальними (якщо брус не обертається).

Оскільки на кручення працюють вали, що зазвичай мають круглий, або кільцевий переріз, то розглянемо кручення круглого циліндра (рис. 5.1). Виготовимо з гуми (для більшої наочності) прямий круговий циліндричний брус, жорстко затиснемо один його кінець і нанесемо на його поверхню сітку ліній, що складається з твірних і кіл, а потім прикладемо до вільного кінця бруса пару сил m , щоб вона діяла в площині, перпендикулярній до осі, тобто піддамо брус деформації кручення.

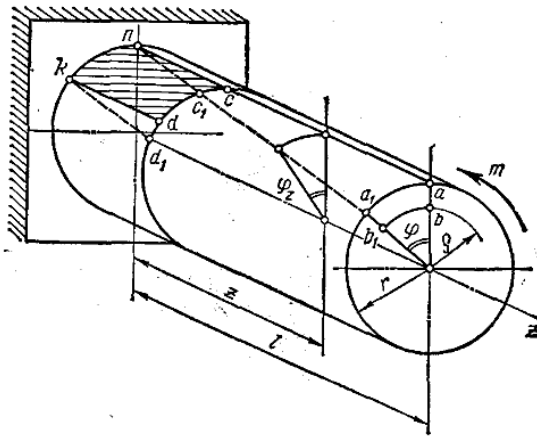


Рисунок 5.1

У цьому разі:

- 1) вісь циліндра, яку називають віссю кручення, залишиться прямолінійною;
- 2) діаметри кіл, нанесених на поверхню циліндра до деформації, під час деформації залишаться такими самими й відстань між колами не зміниться;
- 3) твірні циліндра перетворяться у гвинтові лінії.

На підставі цього можна дійти висновку, що при крученні круглого циліндра справедлива гіпотеза плоских перерізів (див. п. 1.2), а також припустити, що радіуси кіл залишаються під час деформації прямими. Оскільки в поперечних перерізах бруса немає поздовжніх сил, то відстані між перерізами не змінюються. З цього випливає, що деформація кручення круглого циліндра полягає у повертанні поперечних перерізів одного відносно другого навколо осі кручення, до того ж кути їхнього повороту прямо пропорційні відстаням від закріпленого перерізу. Кут повороту перерізу φ_z дорівнює куту закручування частини циліндра, що знаходиться між цим перерізом і закріпленням. Кут φ повороту кінцевого перерізу називають повним кутом закручування циліндра.

Відносним кутом закручування Θ називають відношення кута закручування φ_z до відстані z від певного перерізу до закріплення. Якщо брус довжиною ℓ має сталий переріз і навантажений скручувальним моментом на кінці (тобто складається з однієї ділянки), то

$$\Theta = \varphi_z/z = \varphi/\ell = \text{const.} \quad (5.1)$$

Розглядаючи тонкий шар матеріалу на поверхні бруса, обмежений будь-якою клітинкою сітки (наприклад, $kncd$ – рис. 5.1), бачимо, що ця клітинка при навантаженні перекошується (knc_1d_1). Подібне спостерігалось під час вивчення деформації зсуву. На цій підставі можна дійти висновку, що *при крученні* також виникає *деформація зсуву*, але не за допомогою поступального, а внаслідок обертального руху одного поперечного перерізу відносно іншого. Отже, при крученні у поперечних перерізах виникають тільки дотичні внутрішні сили, які утворюють крутний момент. Крутний момент є результатом моментом відносно осі бруса внутрішніх дотичних сил, які діють у поперечному перерізі.

5.2 Епюри крутних моментів

Для наочного зображення розподілу крутних моментів уздовж осі бруса будують епюри крутних моментів. Крутний момент у перерізах бруса визначають за допомогою методу перерізів. Оскільки вал, який рівномірно обертається, як і нерухомий брус, перебуває у рівновазі, то очевидно, що внутрішні сили, які виникають у поперечному перерізі, повинні зрівноважувати зовнішні моменти, які діють на розглядувану частину бруса. Звідси випливає, що *крутний момент у будь-якому*

поперечному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, прикладених до частини бруса справа або зліва від перерізу.

Епюри крутних моментів дають змогу визначати небезпечні перерізи. Зокрема, якщо брус має сталий поперечний переріз, то небезпечними будуть перерізи на ділянці, де виникає найбільший за модулем крутний момент.

Крутний момент вважаємо додатним, якщо результуючий момент зовнішніх пар, прикладених до розглядуваної частини бруса, буде напрямлений проти стрілки, годинника, коли дивиться з боку перерізу для лівої частини бруса, і навпаки. Вважатимемо, що у поперечному перерізі, де прикладено обертальний або скручувальний момент, значення крутного моменту змінюються стрибкоподібно.

Приклад 5.1. Побудувати епюру крутних моментів для трансмісійного вала, зображеного на рисунку 5.2. Обертальні моменти на шківів дорівнюють: $T_1 = 500$ Н·м, $T_2 = 150$ Н·м, $T_3 = 250$ Н·м, $T_4 = 100$ Н·м.

Розв'язання. Розділимо вал на п'ять ділянок відповідно до рисунку рис. 5.2. Застосуємо метод перерізів. На першій ділянці довільно проведемо переріз 1–1, і розглянемо рівновагу лівої частини вала (рис. 5.2).

Рівняння моментів відносно осі z виглядає так: $\Sigma M_z = T_{кр1} = 0$, тобто крутний момент для першої ділянки – $T_{кр1} = 0$.

Друга ділянка (рис. 5.2) така:

$$\Sigma M_z = -T_1 + T_{кр2} = 0, \quad T_{кр2} = T_1 = 500 \text{ Н·м.}$$

Третя ділянка (рис. 5.2) має такий вигляд:

$$\Sigma M_z = -T_1 + T_2 + T_{кр3} = 0, \quad T_{кр3} = T_1 - T_2 = 350 \text{ Н·м.}$$

Четверта ділянка (рис. 5.2) така:

$$\Sigma M_z = -T_1 + T_2 + T_3 + T_{кр4} = 0, \quad T_{кр4} = T_1 - T_2 - T_3 = 100 \text{ Н·м.}$$

На п'ятій ділянці, якщо розглядати праву від перерізу частину вала, зовнішні моменти не діють, і крутний момент дорівнює нулю $T_{кр5} = 0$.

Домовимосся відкладати додатні крутні моменти вгору від осі епюри, а від'ємні – униз. Будуємо епюру крутних моментів (рис. 5.2). Проводимо на ділянці «1» горизонтальну пряму по осі епюри до шківів 1, де епюра робить «стрибок», що дорівнює величині $T_{кр2} = 500$ Н·м. На ділянці «2» проводимо горизонтальну пряму до шківів 2. На ділянці «3» $T_{кр3} = 350$ Н·м і тому будуємо горизонтальну пряму до шківів 3. Тут епюра знову робить «стрибок» униз до величини $T_{кр4} = 100$ Н·м. На останній ділянці епюра співпадає з нульовою лінією.

Зауважимо, що величина «стрибка» на епюрі крутних моментів завжди чисельно дорівнює значенню зовнішнього моменту, який прикладено у відповідному перерізі. З епюри видно, що найбільший крутний момент буде на ділянці «2», який матиме такий вигляд: $T_{кр2} = 500 \text{ Н·м}$.

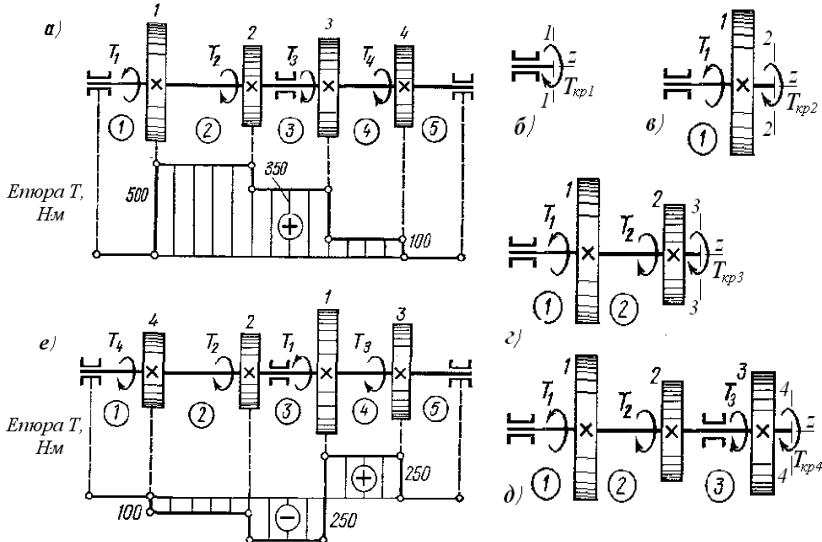


Рисунок 5.2

Рациональним розміщенням шківів можна домогтися зменшення значення T_{\max} . На рисунку 5.2 зображено схему розміщення шківів і відповідну їй епюру, з якої видно, що найбільше значення крутного моменту при цьому 250 Н·м, тобто в два рази менше, ніж у першому випадку. Таке розміщення шківів економічно вигідне, оскільки дає можливість передавати задані потужності за допомогою вала меншого діаметра.

Доцільнішим вважають таке розміщення шківів на валу, при якому найбільші додатні й від'ємні значення крутних моментів на ділянках будуть за можливістю однаковими (див. епюру T на рис. 5.2).

5.3 Напруження й деформації кручення

Уявимо, що прямий круговий циліндр, який зазнає деформації кручення, складається з нескінченно великої кількості волокон, паралельних осі.

Під час кручення відбуваються деформації зсуву, тобто у точках поперечного перерізу бруса виникають тільки дотичні напруження τ , які перпендикулярні до радіуса, що сполучає ці точки з віссю кручення. Існування нормальних напружень у поздовжньому перерізі виключається, оскільки зовнішні сили – це тільки обертальні моменти, і справедлива гіпотеза про ненависання волокон.

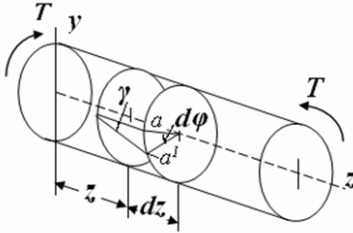


Рисунок 5.3

Видно, що при навантаженні один переріз повертається відносно другого, і точка a переміщується в положення a^1 , отже, дуга aa^1 визначається таким співвідношенням:

$$\cup aa^1 = \rho d\varphi,$$

де ρ – відстань волокна від осі кручення;
 $d\varphi$ – кут закручення на відрізок dz .

Відносний зсув волокна

$$a: \gamma = aa^1/dz = \rho d\varphi/dz.$$

Запишемо закон Гука для зсуву, що виглядає так:

$$\tau = G\gamma = G\rho d\varphi/dz.$$

При $\rho = 0$ буде $\tau = 0$, тобто на осі дотичні напруження дорівнюють нулю.

Дотичні напруження на поверхні набувають максимальних значень τ_{\max} . Виділимо на площі перерізу нескінченно малу площадку dF , яка знаходиться на відстані ρ від осі (рис. 5.4). Сила dQ , яка діє на площадку, буде перпендикулярна до радіуса й буде визначатися так:

$$dQ = \tau dF = G\rho dF d\varphi/dz.$$

Визначимо момент внутрішніх сил відносно осі кручення, тобто крутний момент, що має такий вигляд:

$$T = \int_F dQ \rho = \int_F G(d\varphi / dz) \rho dF \rho = G(d\varphi / dz) \int_F \rho^2 dF. \quad (5.2)$$

Тобто $T = GJ_p (d\varphi / dz),$

де $\int_F \rho^2 dF = J_p$ – полярний момент інерції (див. п. 4.2), $d\varphi / dz$ – стала величина для певного перерізу.

Знайдемо з (5.2) відносний кут закручування, що виглядатиме так:

$$\Theta = d\varphi / dz = T / (GJ_p), \text{ рад.} \quad (5.3)$$

Повний кут закручування кругового циліндра довжиною ℓ :

$$\varphi = \int_0^\ell T dz / (GJ_p). \quad (5.4)$$

Якщо величини T, G, J_p – сталі, то після інтегрування повний кут закручування знаходиться за такою формулою:

$$\varphi = T \ell / (GJ_p), \text{ рад.} \quad (5.5)$$

Добуток GJ_p , що міститься у знаменнику, називають *жорсткістю перерізу при крученні*.

Тобто повний кут закручування круглого циліндра прямо пропорційний крутному моменту, довжині циліндра й обернено пропорційний жорсткості перерізу при крученні. Ця формула дійсна в межах, коли деформації прямо пропорційні навантаженню.

Для циліндричного бруса, що має декілька ділянок, які різняться матеріалом, розмірами поперечного перерізу, величиною крутного моменту, повний кут закручування дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування окремих ділянок:

$$\varphi = \sum \varphi_i. \quad (5.6)$$

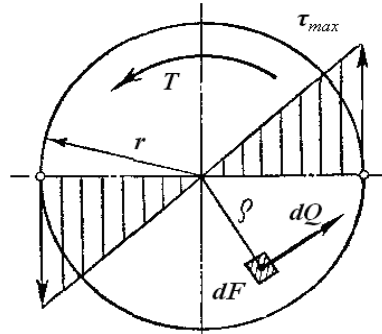


Рисунок 5.4

Підставимо відносний кут закручування $d\phi/dz = T/(GJ_\rho)$ у формулу закону Гука $\tau = G\gamma = G\rho d\phi/dz$ і знайдемо формулу для обчислення напружень у такий спосіб:

$$\tau_\rho = GT\rho/(GJ_\rho) = T\rho/J_\rho \quad (5.7)$$

Епюра розподілу напружень уздовж радіуса перерізу має вигляд трикутника (рис. 5.5). Якщо брус складається з однієї ділянки, тобто має сталий переріз і сталий за довжиною крутний момент, то дотичні напруження в певному волокні будуть аз всією довжиною циліндра однакові.

Коли $\rho = r$ (на поверхні бруса), то напруження матимуть максимальне значення і виглядатимуть так:

$$\tau_{\max} = Tr/J_\rho = T/W_\rho, \quad (5.8)$$

де $W_\rho = J_\rho/r$ – момент опору крученню (або полярний момент опору).

Момент опору крученню дорівнює відношенню полярного моменту інерції до радіуса перерізу.

Одиниця вимірювання моменту опору крученню,

$$[W_\rho] = [J_\rho]/[r] = \text{м}^3.$$

Отже, напруження й деформації кручення круглого циліндра обчислюються за такими формулами:

$$\tau_{\max} = Tr/J_\rho = T/W_\rho, \quad \varphi = T\ell/(GJ_\rho), \quad \varphi = \sum \varphi_i.$$

Варто звернути увагу на те, що ці формули за структурою аналогічні формулам для обчислення напружень і деформацій розтягу – стиску й застосовні тільки для ділянок бруса з однакового матеріалу, що мають сталі поперечний переріз і крутний момент.

З епюри розподілу дотичних напружень при крученні видно, що внутрішні волокна бруса зазнають невеликих напружень, тому вали іноді роблять порожнистими, чим досягається значний вигравш у матеріалі.

Визначимо момент опору крученню для круглого й кільцевого перерізів такі:

1. Круг діаметра d такий: $W_\rho = J_\rho/(0,5 d) = \pi d^3 / 16 \approx 0,2 d^3$.
2. Кільце $D \times d$:

$$W_\rho = J_\rho/(0,5 D) = \pi (D^4 - d^4)/(16 D) \approx 0,2 (D^4 - d^4)/D.$$

Зазначимо, що момент опору крученню кільця не можна визначити як різницю моментів опорів кругів діаметрів D і d .

5.4 Розрахункові формули на міцність і жорсткість для кручення

Умова міцності бруса для кручення полягає в тому, що найбільше дотичне напруження, яке виникає в ньому, не повинне перевищувати припустиме:

$$\tau_{\max} = T/W_p \leq [\tau]_{кр}. \quad (5.9)$$

Припустиме дотичне напруження кручення вибирають залежно від припустимого напруження розтягу, а саме:

для сталей $[\tau]_{кр} = (0,55-0,6) [\sigma]_p$;

для чавунів $[\tau]_{кр} = (1-1,2) [\sigma]_p$.

Умова жорсткості, згідно із формулою (5.2),

$$\Theta = T/(GJ_p) \leq [\Theta], \quad (5.10)$$

де $[\Theta]$ – припустимий відносний кут закручування (рад), який вибирають залежно від призначення конструкції та умов навантаження: $[\Theta] = (0,3-0,5)$ (градус на метр $^{\circ}/\text{м}$).

У формулі (5.10) кут закручування виражено в радіанах. Тому наведені припустимі значення кутів необхідно перевести в радіани, помноживши їх на $\pi/180$.

При розрахунках конструкцій на міцність виникають такі задачі, які відрізняються формою застосовування розрахункової формули.

1. *Проектний розрахунок*, при якому визначають момент опору крученню

$$W_p \geq T/[\tau]_{кр}.$$

Наприклад, для суцільного круглого вала діаметра d

$$W_p = J_p/(0,5 d) = \pi d^3/16 \approx 0,2 d^3$$

і можна з (5.9) визначити діаметр вала

$$d \geq \sqrt[3]{16T/(\pi[\tau]_{кр})} \approx \sqrt[3]{5T/[\tau]_{кр}}. \quad (5.11)$$

Для порожнистого вала спочатку задаються співвідношенням внутрішнього d та зовнішнього D діаметрів ($\alpha = d/D$), а потім, з урахуванням значення моменту опору крученню для кільцевого перерізу

$$W_p = \pi(D^4 - d^4)/(16D) = \pi D^3(1 - \alpha^4)/16 \approx 0,2 D^3(1 - \alpha^4),$$

знаходять зовнішній діаметр вала

$$D \geq \sqrt[3]{16T/(\pi[\tau]_{кр}(1 - \alpha^4))} \approx \sqrt[3]{5T/([\tau]_{кр}(1 - \alpha^4))}. \quad (5.12)$$

2. *Перевірний розрахунок*, при якому визначають робоче напруження й порівнюють його з припустимим для випадків, коли задані розміри вала. Цей розрахунок виглядатиме так:

$$\tau_{\max} = T/W_p \leq [\tau]_{\text{кр}}. \quad (5.13)$$

3. *Визначення крутного моменту*, який припускається

$$T_{\max} \leq [\tau]_{\text{кр}} W_p. \quad (5.14)$$

4. Коли знайдені розміри вала з умови міцності, *перевіряють вал на жорсткість* (5.10) у такий спосіб:

$$\Theta = T/(GJ_p) \leq [\Theta].$$

Іноді при розрахунках вала відома потужність K (кВт), яка ним передається, та частота обертання n , хв⁻¹. Тоді крутний момент у розрахункових формулах можна виразити так:

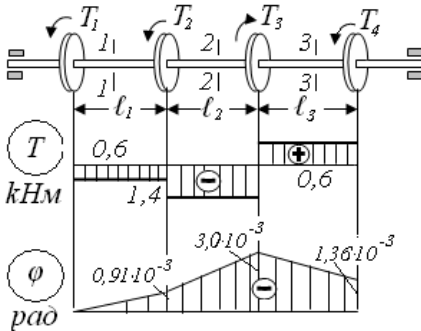


Рисунок 5.5

$$T = K/\omega = 30 K/\pi n = 9549 K/n, \quad (5.15)$$

де $\omega = \pi n/30$ – кутова швидкість вала.

Приклад 5.1. Визначити діаметр суцільного вала (рис. 5.5) при таких значеннях моментів, які передаються шківками: $T_1 = 0,6$ кН·м; $T_2 = 0,8$ кН·м; $T_3 = 2$ кН·м; $T_4 = 0,6$ кН·м. Довжина ділянок: $l_1 = l_2 = 50$ см,

$l_3 = 90$ см. Припустимо напруження $[\tau]_{\text{кр}} = 20$ МПа; припустимий відносний кут закручування $[\Theta] = 1/4^\circ/\text{м} = \pi/(180 \cdot 4)$ рад/м; модуль пружності сталі при зсуві $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. Побудувати епюру кутів закручування вала.

Розв'язання. Застосуємо метод перерізів. Розглянемо рівновагу лівої частини вала, знаходимо крутні моменти й будуємо епюру крутних моментів T на ділянках.

Ділянка l_1 , переріз 1–1: $T_{1\text{кр}} = -T_1 = -0,6$ кН·м.

Ділянка l_2 , переріз 2–2: $T_{2\text{кр}} = -T_1 - T_2 = -0,6 - 0,8 = -1,4$ кН·м.

Ділянка l_3 , переріз 3–3: $T_{3\text{кр}} = -T_1 - T_2 + T_3 = 0,6$ кН·м.

Найбільший за модулем момент на ділянці l_2 вала такий:

$$T_{\max} = |T_{2\text{кр}}| = 1,4 \text{ кН·м.}$$

Обчислюємо діаметр вала (5.12) так:

$$d \geq \sqrt[3]{5T/[\tau]_{кр}} = \sqrt[3]{5 \cdot 1,4 \cdot 10^6 / 20} = 70,5 \text{ мм.}$$

Знайдемо також діаметр вала з умови жорсткості, згідно з формулою (5.2)

$$\Theta = T/(GJ_p) \leq [\Theta],$$

$$d \geq \sqrt[4]{10T/(G[\Theta])} = \sqrt[4]{10 \cdot 1,4 \cdot 10^6 \cdot 180 \cdot 4 / (8 \cdot 10^4 \pi \cdot 10^{-3})} = 79,6 \text{ мм} \approx 80 \text{ мм,}$$

$$\text{де } J_p = \pi d^4 / 32 \approx 0,1 d^4.$$

Приймаємо більший діаметр ($d = 80 \text{ мм}$), який знайдено з умови жорсткості.

Визначимо кути закручування на окремих ділянках:

$$\varphi_{12} = T_{1кр} \ell_1 / (GJ_p) = -0,6 \cdot 10^6 \cdot 50 \cdot 10 / (8 \cdot 10^4 \cdot 4,1 \cdot 10^6) = -0,91 \cdot 10^{-3} \text{ рад;}$$

$$\varphi_{23} = T_{2кр} \ell_2 / (GJ_p) = -1,4 \cdot 10^6 \cdot 50 \cdot 10 / (8 \cdot 10^4 \cdot 4,1 \cdot 10^6) = -2,1 \cdot 10^{-3} \text{ рад;}$$

$$\varphi_{34} = T_{3кр} \ell_3 / (GJ_p) = 0,6 \cdot 10^6 \cdot 90 \cdot 10 / (8 \cdot 10^4 \cdot 4,1 \cdot 10^6) = 1,65 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}$$

кути закручування вала відносно шківів 1:

$$\varphi_{13} = \varphi_{12} + \varphi_{23} = -3,0 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}$$

$$\varphi_{14} = \sum \varphi_i = \varphi_{12} + \varphi_{23} + \varphi_{34} = -1,36 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}$$

$$\text{де } J_p \approx 0,1 d^4 = 0,1 \cdot 80^4 = 4,1 \cdot 10^6 \text{ мм}^4.$$

Будуємо епюру кутів закручування φ . При цьому вважаємо один шків умовно нерухомий – це шків 1.

Можна рекомендувати такий порядок розрахунку валів на міцність і жорсткість при крученні:

1. За схемою вала й обертальними моментами, що діють на нього, будують епюри крутних моментів на окремих ділянках (рис. 5.3), добирають матеріал для вала і визначають припустиме напруження $[\tau]_{кр}$.

2. Обчислюють діаметр вала з умови міцності (5.11). Якщо по окремих ділянках діють істотно різні за модулем крутні моменти, то вал потрібно конструювати східчастим. При цьому діаметр вала кожного східця розраховують відповідно до умови міцності (5.11).

3. Визначивши розміри вала з умови міцності, за необхідністю перевіряють вал на жорсткість, використовуючи для цього умову жорсткості (5.10).

Контрольні запитання до розділу 5

1. Який різновид деформації бруса називається крученням?
2. Що називається крутним моментом у перерізі стрижня?
3. Як визначається крутний момент у довільному перерізі стрижня?
4. Що становить епюра крутних моментів? Як її будують?
5. Як визначають кут закручування стрижня? Його розмірність?
6. Як визначають повний кут закручування стрижня з декількома ділянками навантаження?
7. Які напруження діють у поперечному перерізі стрижня при крученні? Як вони розподіляються у випадку круглого перерізу стрижня?
8. Як визначають дотичні напруження в довільній точці круглого перерізу стрижня при крученні?
9. Де виникають і як визначаються максимальні дотичні напруження у перерізі стрижня при крученні?
10. Що зветься полярним моментом опору площі перерізу та як його визначають для круглого суцільного та кільцевого перерізів вала? Його розмірність?
11. Напишіть умову міцності для бруса при крученні.
12. Запишіть умову жорсткості бруса при крученні.

6 ЗГИН

6.1 Чистий згин прямого бруса

Чистим згином називають такий різновид деформації, при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки *згинальний момент*. Деформація чистого згину буде, наприклад, тоді, коли до прямого бруса в площині, яка проходить через вісь, прикласти дві однакові за величиною та протилежні за знаком пари сил. На згин працюють балки, осі, вали й інші деталі машин, конструкцій.

Надалі майже завжди розглядатимемо такі бруси, у яких є принаймні одна площина симетрії й із нею збігається площина дії навантажень. У цьому разі деформація згину відбувається в площині дії зовнішніх сил, і *згин називають прямим*, на відміну від косого згину, який буде розглянуто далі.

На бокову поверхню призматичного гумового (для більшої наочності) бруса прямокутного перерізу нанесемо сітку поздовжніх і поперечних прямих ліній, і піддамо цей брус деформації чистого згину (рис. 6.1). Унаслідок цього побачимо таке:

а) поперечні прямі лінії під час деформації залишаються прямими, але повернуться назустріч одна одній, отже, поперечні перерізи залишаються плоскими;

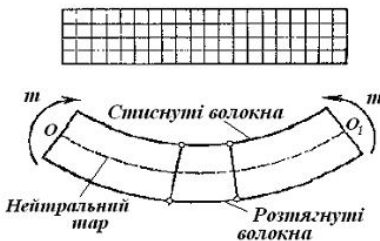


Рисунок 6.1

б) поздовжні прямі лінії, а також вісь бруса викривляться по дузі кола;

в) перерізи бруса стануть ширшими в поперечному напрямі на вгнутому боці й звужаться на опуклому боці.

На підставі описаного досліду можна дійти висновку, що для чистого згину виконується *гіпотеза плоских перерізів*, волокна, які лежать на опуклому боці, *розтягуються*, а ті, що лежать на вгнутому боці – *стискаються*. На межі між ними лежить *нейтральний шар* OO_1 волокон, які тільки викривляються, не змінюючи своєї довжини, і тому на осі бруса нормальні напруження дорівнюють нулю. Приймаючи дійсною гіпотезу про ненависання волокон, можна стверджувати, що при чистому згині в поперечних перерізах бруса виникають тільки нормальні напруження розтягу й стиску, які нерівномірно розподілені по перерізу.

Викривлення волокон і осі бруса відбувається внаслідок нерівномірного розподілу нормальних напружень по поперечному перерізу. Лінію перетину нейтрального шару із площиною поперечного перерізу називають *нейтральною лінією перерізу*.

6.2 Згинальний момент і поперечна сила

Як відомо з теоретичної механіки, опорні реакції балок визначають, складаючи й розв'язуючи рівняння рівноваги статки для всієї балки. При визначенні внутрішніх сил враховують реакції в'язів одночасно з активними зовнішніми силами, які діють на балку. Для визначення внутрішніх силових факторів (далі – ВСФ) застосуємо метод перерізів.

Розглянемо два випадки:

1. До балки прикладені *дві однакові за величиною та протилежні за знаком пари сил* (рис. 6.2). Розглядаючи рівновагу лівої або правої частини балки від перерізу, бачимо, що в усіх поперечних перерізах виникає тільки згинальний момент T , який дорівнює зовнішньому моменту. Отже, розглянутий випадок є випадком *чистого згину*.

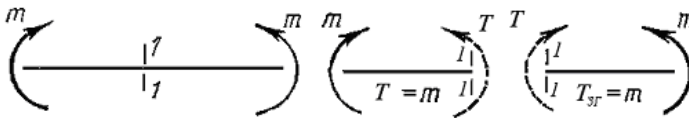


Рисунок 6.2

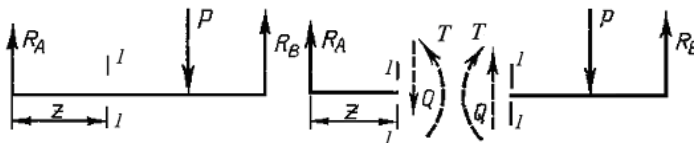


Рисунок 6.3

Згинальний момент є результуючим моментом відносно нейтральної осі внутрішніх нормальних сил, які діють у поперечному перерізі балки.

2. До балки прикладені *активні й реактивні сили, перпендикулярні до осі* (рис. 6.3). Розглядаючи рівновагу частин балки, розміщених зліва й справа від перерізу $I-I$, отримаємо, що в поперечних перерізах повинні діяти згинальний момент T і поперечна сила Q .

3. Із цього випливає, що в розглянутому випадку в точках поперечних перерізів діють не тільки нормальні напруження, які відповідають згинальному моменту, а й дотичні напруження, які відповідають поперечній силі.

Згин, при якому в поперечному перерізі балки діють згинальний момент і поперечна сила, називають *поперечним*.

Для балки, яка перебуває в рівновазі під дією плоскої системи зовнішніх сил, перпендикулярних до осі балки (тобто системи паралельних сил), зовнішні сили, які діють на балку зліва від перерізу, зрівноважені силами, які діють на балку справа від перерізу. Крім того, внутрішні сили взаємодії двох частин балки повинні бути напрямлені протилежно (рис. 6.3).

Для плоскої системи сил приймаємо додатні напрями ВСФ згідно з рисунком 6.4.

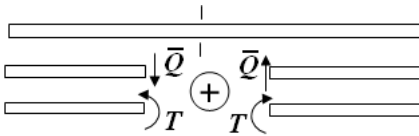


Рисунок 6.4

Тобто для лівої частини балки поперечна сила напрямлена вниз, а згинальний момент проти руху стрілки годинника, а для правої частини навпаки.

Для наочного зображення розподілу вздовж осі балки поперечних сил і згинальний моментів будують епюри, які дають змогу визначити можливий небезпечний переріз балки, встановити значення поперечної сили й згинаючого моменту в цьому перерізі.

Методика побудови епюр внутрішніх силових факторів

1. Увесь стрижень необхідно розділити на ділянки. Початок і кінець ділянки визначається зміною зовнішніх сил, що діють на стрижень.

2. На кожній ділянці показують переріз. Далі розглядають ліву чи праву частину стрижня від перерізу, зазвичай ту, де менше сил.

3. Для частини, яку виділено, задають координату перерізу, зображають зовнішні сили й внутрішні, згідно з рисунком 6.4. Визначають границі зміни координати перерізу.

4. Записують рівняння рівноваги, з яких знаходять функції ВСФ. Згідно за цими функціями будують епюри ВСФ для кожної ділянки.

Приклад 6.1. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки, шарнірно закріпленої двома кінцями. Балка навантажена зосередженою силою P (рис. 6.5).

Розв'язання. Зовнішні сили вертикальні, тому реакції будуть також вертикальними. Визначаємо опорні реакції R_A й R_B , склавши таке рівняння моментів відносно точок A і B :

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0; \quad -Pa + R_B \ell = 0, \quad R_B = Pa/\ell; \\ \sum M_B = 0; \quad -R_A \ell + Pb = 0, \quad R_A = Pb/\ell.\end{aligned}$$

Перевірка:

$$\sum Y = 0; \quad R_A + R_B - P = Pb/\ell + Pa/\ell - P = R_A = P(b + a)/\ell - P = 0.$$

Обчислення виконані вірно.

У цьому прикладі межами ділянок є точка C , до якої прикладена зосереджена сила P , а також опори A і B , де прикладені реакції R_A й R_B . Отже, ця балка складається із двох ділянок AC і CB . Проводимо довільний переріз $I-I$ (рис. 6.5), розглядаємо ліву частину балки (рис. 6.5), зображаємо внутрішні сили в перерізі, вважаючи їх додатними, записуємо рівняння рівноваги та знаходимо внутрішні сили:

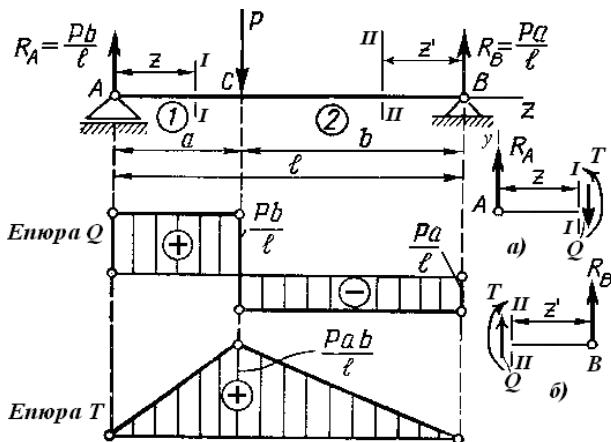


Рисунок 6.5

$$\begin{aligned}\sum Y = R_A - Q = 0; \\ \sum M_I = -R_A \cdot z + T = 0. \\ \text{Отже, } Q = R_A = Pb/\ell, \\ T = R_A z,\end{aligned}$$

де координата z змінюється в межах ділянки AC , тобто $0 \leq z < a$. Поперечні сили – стала величина в межах ділянки, через що епюра зображується прямою лінією, яка паралельна осі епюри (нульова лінія графіка). Згинальний момент T – лінійна функція z .

Для побудови епюри T обчислюємо таке:

$$T_{z=o} = 0, \quad T_{z=a} = Pab/\ell$$

і будуємо цю пряму (епюра T на ділянці AC).

Далі проводимо переріз $II-II$ (рис. 6.5), розглядаємо праву частину балки (рис. 6.5), зображаємо внутрішні сили в перерізі, вважаючи їх додатними, записуємо рівняння рівноваги і знаходимо внутрішні сили

$$Q = -R_B = -Pa/\ell \quad \text{і} \quad T = R_B z^1,$$

де координата z^1 змінюється в межах ділянки BC , тобто $0 \leq z^1 < b$. Обчислюємо

$$T_{z=o} = 0; \quad T_{z=b} = Pab/\ell$$

і будуємо епюри. Найбільше значення згинального моменту T матиме під зосередженою силою: $T_{\max} = Pab/\ell$.

6.3 Диференціальні залежності для згину

Між згинальним моментом, поперечною силою та інтенсивністю розподіленого навантаження існують диференціальні залежності, в основі яких лежить теорема Журавського.

Розглянемо балку, зображену на рисунку 6.6. Початок координат візьмемо на лівому кінці балки, а вісь z спрямовуємо вправо. На одній із ділянок балки проведемо переріз із поточною координатою z . Розглянемо ліву частину балки (рис. 6.6) і запишемо таке рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum Y &= R_A - P_1 + q(z-b) - Q = 0; \\ \sum M_C &= -R_A z - m + P_1(z-a) - q(z-b)^2/2 + T = 0. \end{aligned}$$

Із цих рівнянь обчислюємо поперечну силу Q і згинальний момент T у такий спосіб:

$$\begin{aligned} Q &= R_A - P_1 + q(z-b); \\ T &= R_A z + m - P_1(z-a) + q(z-b)^2/2. \end{aligned}$$

Продиференціювавши останній вираз за координатою z , матимемо таке:

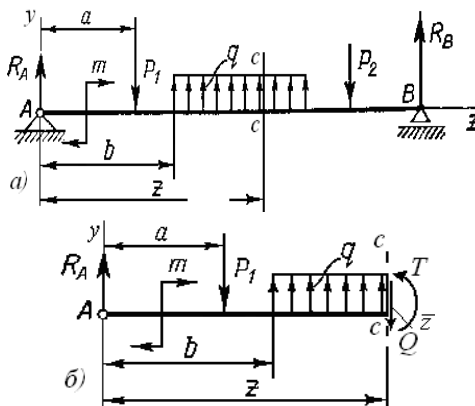


Рисунок 6.6

$$\frac{dT}{dz} = R_A - P_1 + q(z - b).$$

Вираз, який стоїть у правій частині цієї рівності, є поперечною силою Q в перерізі z . Отже, похідна

$$\frac{dT}{dz} = Q. \quad (6.1)$$

Якщо останнє рівняння продиференціювати ще раз за координатою z , то матимемо

$$\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q, \quad (6.2)$$

тобто друга похідна від згинального моменту або перша похідна від поперечної сили за абсцисою перерізу балки дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження.

Як відомо, за законом другої похідної функції можна судити про опуклість або вогнутість кривої. Це правило використовують при побудові епюр сили Q і моменту T .

Розглянемо випадок, коли інтенсивність розподіленого навантаження: $q = \text{const}$.

У цьому випадку з рівнянь (6.2) і (6.1) отримаємо

$$Q = qz + C_1; \quad (6.3)$$

$$T = qz^2/2 + C_1z + C_2, \quad (6.4)$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування.

На підставі (6.3) і (6.4) можна сформулювати *правила побудови й перевірки епюр*, які наведені в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1

1. У перерізі, де прикладена сила F_y ,		{	{	– на епюрі Q – стрибок у напрямі дії сили на величину F_y ;
				– на епюрі T – перелом, напрям вістря якого протилежно силі F_y .
2. Якщо на ділянці	{	$q = 0$	{	– епюра Q – пряма лінія паралельна осі;
		$q = \text{const}$		– епюра T – загалом – похила пряма лінія
				– епюра Q – похила пряма лінія;
				– епюра T – квадратична парабола, опуклість якої протилежна напрямку q .
3. У перерізі, де прикладена зовнішня пара сил, момент якої m_k		{	{	– на епюрі Q – змін немає;
				– на епюрі T – стрибок на величину моменту пари m_k униз, якщо $m_k > 0$ і, навпаки, якщо $m_k < 0$.
4. Якщо на ділянці, де $q = \text{const}$, епюра Q змінює знак (перетинає вісь), то на епюрі T у цьому перерізі буде екстремум, координата якого визначається з умови $Q = 0$.				
<i>Примітка.</i> При перевірці рухатись зліва–направо, розриви на епюрах будемо називати стрибками.				

Методику побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів розглянемо на такому прикладі.

Приклад 6.1. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки на рисунку 6.7. Навантаження таке: сила $F = 4 \text{ кН}$, рівномірно розподілене навантаження $q = 6 \text{ кН/м}$, момент пари сил $m = 8 \text{ кН·м}$. Розміри на схемі вказано в метрах.

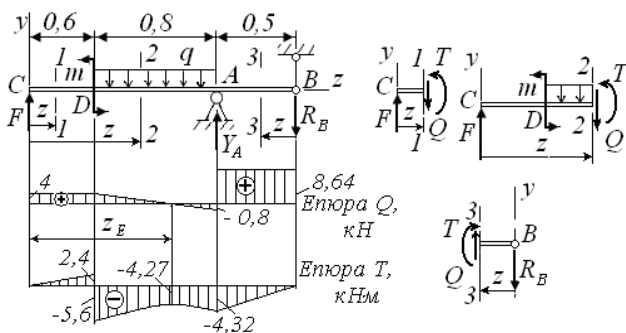


Рисунок 6.7

Розв’язання. Зображаємо вертикальні реакції Y_A і R_B .

Складемо таке рівняння рівноваги для балки:

$$\sum M_A = -F \cdot 1,4 + m - R_B \cdot 0,5 + q \cdot 0,8^2/2 = 0;$$

$$\sum M_B = -Y_A \cdot 0,5 + q \cdot 0,8 \cdot 0,9 + m - F \cdot 1,9 = 0.$$

Знаходимо реакції опор: $R_B = 8,64 \text{ кН}$, $Y_A = 9,44 \text{ кН}$.

Для перевірки обчислимо суму проекцій сил на вісь y :

$$\sum Y = F - q \cdot 0,8 + Y_A - R_B = 4 - 6 \cdot 0,8 + 9,44 - 8,64 = 0.$$

Рівняння виконується, тобто обчислення реакцій опор балки виконані правильно.

Для побудови зазначених епюр застосовуємо метод перерізів.

Ділянка CD, переріз 1–1. Розглядаємо ліву частину балки, зображаємо внутрішні сили в перерізі, вважаючи їх додатними, записуємо рівняння рівноваги (сума моментів тут і далі обчислена відносно центра ваги перерізу) і знаходимо внутрішні сили у такий спосіб:

$$\begin{aligned} \sum Y = F - Q &= 0^0; & Q &= F; \\ \sum M_1 = -Fz + T &= 0^0; & T &= F \cdot z, \end{aligned}$$

де координата z змінюється в межах ділянки, тобто $0 \leq z \leq 0,6$.

Залежності Q і T показують, що в межах ділянки CD поперечна сила не залежить від координати z , а згинальний момент – лінійна функція від z .

Обчислюємо далі значення згинального моменту такі:

$$T_{z=0} = 0 \text{ (точка C)}; \quad T_{z=0,6} = 4 \cdot 0,6 = 2,4 \text{ кН}\cdot\text{м (точка D}_1\text{)}.$$

Тут і далі індекс «1» при літері, яка позначає переріз, указує номер ділянки.

Ділянка DA, переріз 2–2. Розглядаємо ліву частину балки, зображаємо внутрішні сили в перерізі, вважаючи їх додатними, записуємо рівняння рівноваги й знаходимо внутрішні сили у такий спосіб:

$$\begin{aligned} \sum Y = F - q(z - 0,6) - Q &= 0^0; & Q &= F - q(z - 0,6); \\ \sum M_2 = -F \cdot z + m + q(z - 0,6)^2/2 + T &= 0^0; & T &= F \cdot z - m - q \cdot (z - 0,6)^2/2, \end{aligned}$$

де координата z змінюється в межах другої ділянки, тобто $0,6 \leq z \leq (0,6 + 0,8) = 1,4$.

Залежності Q і T показують, що в межах ділянки поперечна сила – лінійна функція координати z , а згинальний момент – квадратична функція z .

Обчислюємо таке:

$$\begin{aligned} Q_{z=0,6} &= 4 \text{ кН (точка D}_2\text{)}, & Q_{z=1,4} &= -0,8 \text{ кН (точка A}_2\text{)}. \\ T_{z=0,6} &= -5,6 \text{ кН}\cdot\text{м (точка D}_2\text{)}, & T_{z=1,4} &= -4,32 \text{ кН}\cdot\text{м (точка A}_2\text{)}. \end{aligned}$$

На ділянках із рівномірно розподіленим навантаженням q у перерізі, де поперечна сила дорівнює нулю (тобто сила Q змінює знак), згинаючий момент приймає екстремальне значення.

Позначимо координату перерізу, де T має екстремум, z_E . Запишемо функцію Q для перерізу z_E , що виглядає так:

$$Q = F - q(z_E - 0,6) = 0$$

і звідси визначаємо координату $z_E = F/q + 0,6 = 1,267$ м.

Підставляючи z_E в рівняння T , знаходимо $T_{z_E} = -4,27$ кН·м.

Ділянка AB , переріз 3–3. Розглядаємо праву частину балки від перерізу. Зображуємо діючі сили. Координата перерізу z може змінюватись від 0 до 0,5 м, тобто $0 \leq z \leq 0,5$ м. Запишемо рівняння рівноваги, що має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \sum Y &= -R_B + Q = 0; \\ \sum M_3 &= -T - R_B z = 0, \\ \text{звідки} \quad Q &= R_B = 8,64 \text{ кН}, \\ T &= -R_B \cdot z. \end{aligned}$$

Залежності Q і T показують, що в межах ділянки поперечна сила не змінюється, а згинальний момент – лінійна функція координати z .

Обчислимо момент T так: при $z = 0$ буде $T = 0$ (точка B);

при $z = 0,5$ м матимемо $T = -4,32$ кН·м (точка A_3).

Відповідно до проведених розрахунків будуємо епюри Q і T .

Проаналізуємо епюру згинаючого моменту. На ділянці CD згинальний момент T додатний, тому балка вигинається на цій ділянці опуклістю вниз, а на ділянці DB – опуклістю вгору, оскільки згинальний момент від'ємний.

Знаходимо максимальні значення таких внутрішніх силових факторів:

- поперечна сила $Q_{\max} = 8,64$ кН ділянка AB ;
- згинальний момент $|T|_{\max} = 5,6$ кН·м – переріз D .

З позиції загальних властивостей епор маємо таке:

– у перерізі D епора T має стрибок униз на значення $2,4 + 5,6 = 8$ кН·м, що відповідає значенню зовнішнього моменту $m = 8$ кН·м у цьому перерізі;

– у перерізах C і B момент $T = 0$, що відповідає зовнішньому навантаженню, бо в перерізах на кінцях балки немає пар сил;

– на епорі T у перерізі A перелом, напрям вістря якого протилежний силі Y_A ;

– на ділянках CD і AB розподіленого навантаження нема ($q = 0$), через що епора T похила пряма лінія, а епора Q пряма лінія паралельна осі;

– у перерізах C , A , B на епорі Q маємо стрибки на величину і в напрямку зовнішніх сил, які прикладені в цих перерізах.

6.4 Нормальні напруження чистого згину

У поперечних перерізах балки у разі чистого згину (див. п. 6.1), при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки згинальний момент і діють тільки нормальні напруження розтягу й стиску. Щоб визначити розподіл цих напружень по поперечному перерізу, потрібно розглянути деформації волокон балки.

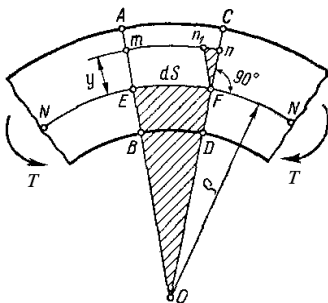


Рисунок 6.8

Розглянемо ділянку балки, яка зазнає деформації чистого згину (рис. 6.8) і в кінцевих перерізах якої діє згинальний момент T . Двома поперечними перерізами AB і CD виділимо елемент балки нескінченно малої довжини dS . Радіус кривизни нейтральної осі (далі – НВ) позначимо ρ . Розглянемо шар волокон mn , який знаходиться на

відстані y від нейтрального шару NN .

Волокна цього елемента внаслідок деформацій згину видовжуються на величину nn_1 , оскільки $n_1F \parallel mE$. Заштриховані трикутники подібні $\triangle OEF \propto \triangle Enn_1$.

Отже, $nn_1/dS = y/\rho$.

Ліва частина – це відносне видовження: $nn_1/dS = \varepsilon$, тобто маємо $\varepsilon = y/\rho$.

Застосувавши закон Гука (2.3) $\sigma = E\varepsilon$, матимемо $\sigma = E y/\rho$.

Із цієї формули видно, що нормальні напруження деформації згину залежать від відстані y від нейтральної осі, через що вони розподілені за висотою перерізу нерівномірно: *максимальні напруження σ_{\max} виникають у волокнах, найбільше віддалених від нейтральної осі*. Від координати x перерізу нормальні напруження не залежать (рис. 6.9).

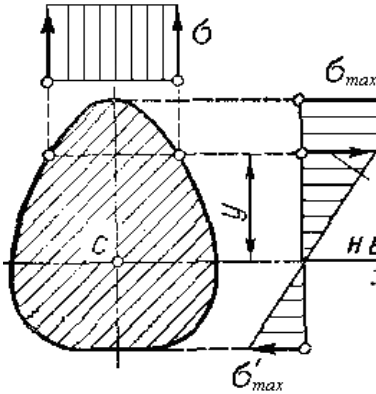


Рисунок 6.9

З першого рівняння рівноваги маємо

$$\int_F dN = \int_F \frac{E y}{\rho} dF = \frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0$$

(E й ρ для цього перерізу є величинами сталими).

Параметри E і ρ не дорівнюють нулю, тому отримаємо

$$\int_F y dF = 0. \quad (6.5)$$

Цей інтеграл є статичним моментом площі відносно осі x . Тому під час згину *нейтральна вісь проходить через центр ваги с площі перерізу*.

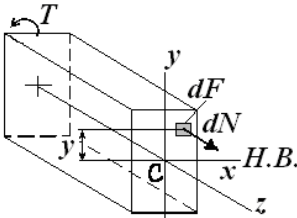


Рисунок 6.10

відносно нейтральної осі x ;

EJ_x – жорсткості перерізу при згині.

Оскільки у випадку чистого згину балки сталого перерізу $T = \text{const}$ і $J_x = \text{const}$, то

$$\rho = EJ_x / T = \text{const}. \quad (6.7)$$

Розглянемо далі частину балки, яку зображено на рисунку 6.10.

Виділимо нескінченно малу площадку dF , на якій нормальна сила dN дорівнює

$$dN = \sigma dF.$$

Складемо таке рівняння рівноваги:

$$\sum Z = 0; \quad \int_F dN = 0;$$

$$\sum M_x = 0; \quad T - \int_F y dN = 0.$$

З другого рівняння рівноваги розглядаємої частини балки маємо

$$T = \int_F y dN = \int_F y \sigma dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF.$$

$$\text{Звідки} \quad T = EJ_x / \rho, \quad (6.6)$$

$$\text{де} \quad J_x = \int_F y^2 dF \text{ — осьовий момент інерції площі поперечного перерізу}$$

мент інерції площі поперечного перерізу

Отже, зігнута вісь буде дугою кола.

Значення ρ підставимо у формулу для обчислення нормальних напружень, що матиме такий вигляд:

$$\sigma = E y / \rho = E y / (E J_x / T) = T y / J_x \quad (6.8)$$

Максимальні значення нормальних напружень будуть там, де волокна найбільш віддалені від нейтральної осі:

$$\sigma_{\max} = T y_{\max} / J_x = T / W_x \quad (6.9)$$

де

$$W_x = J_x / y_{\max} \quad (6.10)$$

W_x – момент опору деформації згину відносно осі x (або осьовий момент опору).

6.5 Розрахункова формула на міцність у разі згину

Умова міцності балки у разі згину полягає в тому, що максимальні нормальні напруження в небезпечному перерізі не повинні перевищувати припустимі, що виглядатиме так:

$$\sigma = |T|_{\max} / W_x \leq [\sigma]. \quad (6.11)$$

У цьому разі допустиме нормальне напруження $[\sigma]$ таке саме, як для розтягу (стиску). Максимальний згинальний момент $|T|_{\max}$ визначають з епюр згинаючих моментів або розраховують.

Визначимо осьові моменти опору таких перерізів:

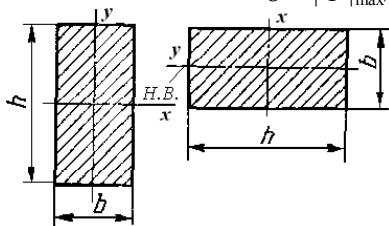


Рисунок 6.11

1. Прямокутник $b \times h$ (рис. 6.11) визначається так:

$$W_x = J_x / y_{\max} = (bh^3/12) / (h/2).$$

$$\text{Отже, } W_x = bh^2 / 6. \quad (6.12)$$

Якщо балку прямокутного перерізу покласти на ширшу грань (рис. 6.11), то $W_y = h b^2 / 6$.

Знайдемо відношення моментів опору так:

$$W_x / W_y = \frac{bh^2}{6} : \frac{hb^2}{6} = \frac{h}{b} > 1.$$

Отже, за інших однакових умов максимальні нормальні напруження в прямокутній балці, яку покладено на ширшу грань, будуть більшими, ніж у тій самій балці, коли її найбільший розмір h вертикальний (мається на увазі, що згин відбувається у вертикальній

площині). Тобто, для забезпечення найбільшої міцності вісь, відносно якої відбувається згин, повинна мати максимальне значення моменту опору.

2. *Круг діаметром d (вісь x – будь-який діаметр) такий:*

$$W_x = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1 d^3. \quad (6.13)$$

3. *Кільце розміром $D \times d$ визначається так:*

$$W_x = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64} : \frac{D}{2} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32 D} \approx 0,1 (D^4 - d^4) / D. \quad (6.14)$$

При однаковій площі поперечного перерізу, тобто однаковій витраті матеріалу, яка відповідає однаковій площі, момент опору кільцевого перерізу більший від моменту опору суцільного круглого перерізу.

Оскільки поблизу нейтральної осі матеріал зазнає незначного напруження, то вигідно більше матеріалу розмішувати далі від нейтральної осі. Тому в техніці рідко використовують металеві балки прямокутного перерізу, але досить широко використовують прокатні профільні балки таврового, двотаврового, кутового, швелерного, кільцевого й інших перерізів.

Моменти інерції, моменти опору й інші відомості про прокатні фасонні профілі стандартних розмірів подано в довідкових таблицях [1].

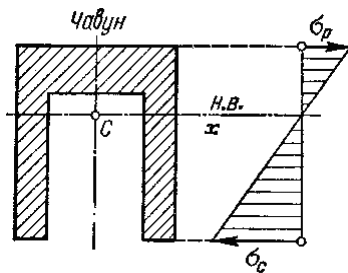


Рисунок 6.12

Витрати матеріалу пропорційні площі перерізу F . Отже, чим більше відношення W/F , тим більший згинальний момент витримує переріз із заданою площею (тобто із заданою вагою стрижня). Тому відношення W/F може бути взято за критерій, що оцінює якість профілю при згині.

Порівняємо щодо економічності за масою балки двотаврового, прямокутного та квадратного перерізу. Припустимо, що з розрахункового рівняння визначено момент опору балки

$$W_x \geq |T|_{\max} / [\sigma] = 1200 \text{ см}^3.$$

Для балок, матеріал яких неоднаково працює на розтяг і стиск (наприклад, для чавуну припустимі напруження на стиск значно більше ніж для розтягу), доцільно використовувати профілі, несиметричні відносно нейтральної осі. Тому деякі деталі виготовляють у вигляді тавра (П-подібні профілі). У цьому разі несиметричного профілю під час згину виникають неоднакові напруження розтягу σ_p й стиску σ_c , тому переріз чавунної балки вигідно розміщувати так, щоб менші напруження були в зоні розтягнутих, а більші – у зоні стиснених волокон (рис. 6.12).

За таблицями стандарту вибираємо двотавровий профіль № 45, який має момент опору $W_{\partial\partial} = 1231 \text{ см}^3 > W_x$. Площа поперечного перерізу обраного двотавра $F_{\partial\partial} = 84,7 \text{ см}^2$, відношення

$$W/F = 1231/84,7 = 14,5.$$

Визначимо далі розміри балки прямокутного перерізу, прийнявши $h = 2b$, що матиме такий вигляд:

$$W_{np} = bh^2/6 = b(2b)^2/6 = 2b^3/3, \\ \text{де } W_{np} = W_x = 1200 \text{ см}^3.$$

Звідси $b = \sqrt[3]{1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 3/2} = 0,122 \text{ м} = 12,2 \text{ см}$; $h = 2b = 24,4 \text{ см}$; $F_{np} = bh = 297 \text{ см}^2$, відношення $W_{np}/F_{np} = 1200/297 = 4,0$.

За інших однакових умов маси балок будуть пропорційні площі поперечних перерізів тобто $F_{np}/F_{\partial\partial} = 297/84,7 = 3,51$.

Отже, балка прямокутного перерізу буде в три з половиною рази важча від балки двотаврового профілю при однаковій міцності.

Визначимо тепер розміри балки квадратного перерізу зі стороною a :

$$W_{кв} = a^3/6, \\ \text{де } W_{кв} = W_x = 1200 \text{ см}^3.$$

Звідси маємо $a = \sqrt[3]{1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 6} = 0,194 \text{ м} = 19,4 \text{ см}$, $F_{кв} = a^2 = 376 \text{ см}^2$, $F_{кв}/F_{\partial\partial} = 4,5$, а відношення $W_{кв}/F_{кв} = 1200/376 = 3,2$.

Тобто балка квадратного перерізу буде в чотири з половиною рази важча від балки двотаврового профілю при однаковій міцності.

При розрахунках конструкцій на міцність при згині розглядаються такі різновиди задач, які відрізняються формою застосовування розрахункової формули:

1. *Проектний розрахунок*, при якому визначають момент опору при згині, такий:

$$W_x \geq |T|_{\max}/[\sigma]. \quad (6.15)$$

Ця величина дає можливість підібрати необхідні прокатні фасонні профілі стандартних розмірів із довідкових таблиць, або обчислити необхідні розміри бруса.

Наприклад, для бруса кільцевого перерізу розміром $D \times d$ з відношенням $d/D = \alpha$, отримаємо осьовий момент опору

$$W_x = \pi (D^4 - d^4) / (32 D) = \pi D^3 (1 - \alpha^4) / 32 \approx 0,1 D^3 (1 - \alpha^4),$$

за допомогою якого з (6.15) знаходимо зовнішній діаметр бруса у такий спосіб:

$$D \geq \sqrt[3]{32 T / (\pi [\sigma] (1 - \alpha^4))} \approx \sqrt[3]{10 T / ([\sigma] (1 - \alpha^4))}. \quad (6.16)$$

2. *Перевірний розрахунок*, при якому визначають робоче напруження й порівнюють його з припустимим для випадків, коли відомий момент опору бруса, виконується так:

$$W_x \geq |T|_{\max} / [\sigma]^3. \quad (6.17)$$

3. Визначити момент згину, який припускається у такий спосіб:

$$|T|_{\max} \leq W_x [\sigma]. \quad (6.18)$$

Рекомендується такий порядок розрахунку бруса на міцність при згині: за схемою навантаження бруса будують епюри поперечних сил і згинальних моментів на окремих ділянках (пункти 6.2, 6.3), за якими знаходять небезпечний переріз; добирають матеріал для бруса й визначають припустиме напруження $[\sigma]$; розраховують згідно з умовою міцності (6.10) осьовий момент опору й підбирають відповідні прокатні профілі стандартних розмірів із довідкових таблиць, або обчислюють розміри бруса.

Методику розрахунку бруса на міцність при згині розглянемо на таких прикладах.

Приклад 6.2. Вважаючи балку двотавровою, визначити номер перерізу з розрахунку на міцність для випадку, коли двотавр встановлено вертикально й коли горизонтально. Припустиме напруження згину $[\sigma] = 120$ МПа, $P = 20$ кН, $q = 2$ кН/м, $\ell = 1,5$ м (рис. 6.13).

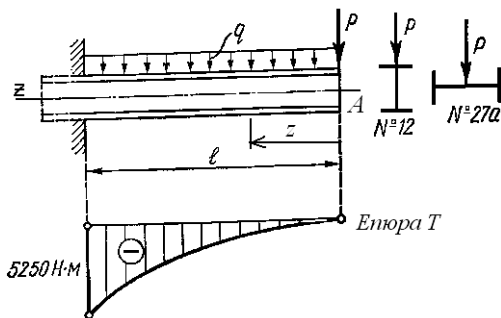


Рисунок 6.13

Розв'язання. Початок координат візьмемо на вільному кінці балки (точка А). Вісь z напрямлена вліво. Для розв'язання задачі досить побудувати одну епюру згинальних моментів. Оскільки балка має тільки одну ділянку, то згинальний момент у перерізі буде

$$T = -Pz - qz^2/2.$$

Епюра T є дугою параболи. Обчислимо значення T на межах ділянки у такий спосіб:

- коли $z = 0$, то $T = 0$;
- якщо $z = \ell = 1,5$ м, то $T = -5250$ Н·м.

Максимальне значення згинальний момент матиме в місці закріплення.

Застосуємо таке розрахункове рівняння на міцність для згину:

$$W_x \geq |T|_{\max} / [\sigma] = 5250/120 \cdot 10^6 = 43,75 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 43,75 \text{ см}^3.$$

Знайдемо за таблицями стандарту [1] найближче більше значення W_x і візьмемо двотавровий профіль № 12, для якого $W_x = 58,4 \text{ см}^3$ (площа перерізу $14,7 \text{ см}^2$). Якщо балку повернути на 90° , тобто розмістити полицьки вертикально, а стінку – горизонтально (рис. 6.13), то для такого випадку потрібний профіль № 27а ($W_x = 58,4 \text{ см}^3$) і балка буде майже в три рази важча (площа перерізу $43,2 \text{ см}^2$). Отже, в останньому випадку балка буде значно важча, тому потрібно використовувати прокатні профілі так, щоб силова площина, яка на рисунку розташована вертикально, була перпендикулярна осі координат, для якої момент опору найбільший.

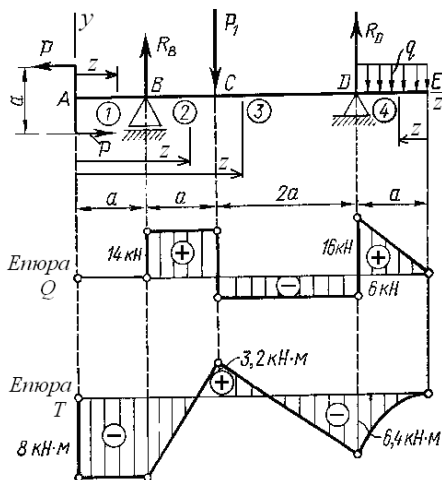


Рисунок 6.14

Для перевірки обчислимо суму проєкцій сил на вісь y у такий спосіб:

$$\sum Y = R_B - P_1 + R_D - qa = 14 - 20 + 22 - 20 \cdot 0,8 = 0.$$

Рівняння виконується тотожно, тобто обчислення реакцій опор балки виконані правильно.

Знаходимо на кожній із чотирьох ділянок такі поперечні сили:

$$Q_{1A} = 0, Q_{1B} = 0, \quad 0 \leq z \leq a$$

(епюра на першій ділянці співпадає з віссю);

$$Q_{2B} = Q_{2C} = R_B = 14 \text{ кН}, \quad a \leq z \leq 2a;$$

$$Q_{3C} = Q_{3D} = R_B - P_1 = -6 \text{ кН}, \quad 2a \leq z \leq 4a$$

(епюра Q_2 і Q_3 на ділянках 2 і 3 – пряма, паралельна осі).

На четвертій ділянці розглядаємо праву частину балки та знаходимо таке:

$$Q_4 = qz, \quad \text{де } 0 \leq z \leq a;$$

В початковій і кінцевій точках ділянки отримаємо $Q_{4E}|_{z=0} = 0$; $Q_{4D}|_{z=a} = qa$ (епюра похила пряма).

Будуємо епюру Q . У перерізах В, С, Д епюра має стрибки відповідно на величину сил R_B , P_1 , R_D у напрямі сил.

Приклад 6.3. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки (рис. 6.14), коли $P = 10$ кН, $P_1 = 20$ кН, $q = 20$ кН/м, $a = 0,8$ м. Перевірити балку на міцність, якщо її переріз – двотавр № 20, а $[\sigma] = 150$ МПа.

Розв'язання. Визначимо реакції опор так:

$$\sum M_B = Pa - P_1a +$$

$$+ R_D \cdot 3a - qa \cdot 3,5a = 0;$$

$$\sum M_D = Pa + P_1 2a - R_B \cdot 3a -$$

$$- qa \cdot 0,5a = 0.$$

Звідси $R_D = 22$ кН;

$$R_B = 14 \text{ кН}.$$

Будуємо далі епюри згинальних моментів на ділянках балки:

$T_1 = T_{1A} = T_{1B} = -Pa = -8 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $0 \leq z \leq a$ (епюра пряма, паралельна осі);

$$T_2 = -Pa + R_B(z - a), \quad a \leq z \leq 2a;$$

$T_{2B}|_{z=a} = -Pa = -0,8 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $T_{2C}|_{z=2a} = -Pa + R_B a = 3,2 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (епюра похила пряма);

$$T_3 = -Pa + R_B(z - a) - P_1(z - 2a), \quad 2a \leq z \leq 4a;$$

$$T_{3C}|_{z=2a} = -Pa + R_B a = 3,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$T_{3D}|_{z=4a} = -Pa + R_B 3a - P_1 2a = -6,4 \text{ кН}\cdot\text{м} \text{ (епюра похила пряма)}.$$

На четвертій ділянці розглядаємо праву частину балки й знаходимо таке:

$$T_4 = -qz^2/2, \quad 0 \leq z \leq a;$$

$T_{4E}|_{z=0} = 0$; $T_{4D}|_{z=a} = -qa^2/2$ (епюра – дуга параболи, опуклість якої напрямлена протилежно напрямку розподіленого навантаження q , тобто доверху).

Будуємо епюру моментів.

Перевіримо балку на міцність. Найбільший згинальний момент для цієї балки маємо на першій ділянці: $|T|_{\max} = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Використаємо таку розрахункову формулу на міцність при згині (1.55):

$$\sigma = |T|_{\max} / W_x \leq [\sigma].$$

Находимо значення моменту опору для двотавра № 20 [1]:

$$W_x = 184 \text{ см}^3.$$

Перевіримо виконання умови міцності у такий спосіб:

$$\sigma = 8 \cdot 10^3 / 184 \cdot 10^{-6} = 43,5 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 150 \text{ МПа}.$$

Умову міцності виконано.

У цьому разі можна стверджувати, що балка працює з великим недовантаженням, бо максимальне нормальне напруження при згині становить тільки 29 % припустимого. Тобто у цьому разі можна рекомендувати для використання двотавр № 12, для якого $W_x = 58,8 \text{ см}^3$, оскільки необхідний момент опору двотавра за формулою (6/15) становить

$$W_x \geq |T|_{\max} / [\sigma] = 8 \cdot 10^6 / 150 = 53,3 \cdot 10^3 \text{ мм}^3 = 53,3 \text{ см}^3.$$

6.6 Дотичні напруження деформації згину

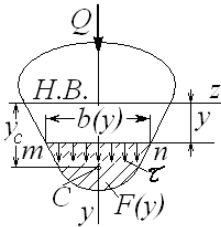


Рисунок 6.15

У поперечних перерізах балки під час деформації поперечного згину виникають не тільки нормальні, а й дотичні напруження. Відповідно до закону парності такі самі дотичні напруження виникатимуть також у поздовжніх перерізах, які паралельні нейтральному шару. Наявність дотичних напружень у поздовжніх перерізах підтверджується експериментально.

Наведемо без доказу таку формулу [1] розрахунку дотичних напружень у балках у разі поперечного згину (рис. 6.15):

$$\tau = \frac{Q S_z(y)}{b(y) J_z}, \quad (6.19)$$

де Q – модуль поперечної сили в перерізі, де визначаються дотичні напруження;

J_z – момент інерції цього перерізу відносно нейтральної осі z (НВ);

$b(y)$ – ширина перерізу на рівні, де визначаються дотичні напруження;

$S_z(y)$ – абсолютне значення статичного моменту відносно нейтральної осі z тієї частини площі $F(y)$, яка міститься між лінією, де визначається τ , та краєм перерізу (на рисунку заштрихована); $S_z(y) = y_C F(y)$;

y_C – координата центра ваги площі $F(y)$ відносно нейтральної осі.

Побудуємо епюру τ для прямокутного перерізу (рис. 6.16).

Для цього проведемо лінію mn , яка паралельна нейтральній лінії, на відстані y від неї й знайдемо значення τ у точках цієї лінії.

Лінія mn відсікає площу $F(y) = b(h/2 - y)$. Статичний момент цієї площі

$$S_z(y) = F(y) \cdot y_C = b(h/2 - y) \cdot [y + (h/2 - y)/2] = (bh^2/8) \cdot (1 - 4y^2/h^2).$$

Відповідно до формули 6.19, враховуючи значення $S_z(y)$, $b(y) = b$, $J_z = bh^3/12$, отримаємо

$$\tau = Q(bh^2/8)(1 - 4y^2/h^2)/(bh^3/12) = 3Q(1 - 4y^2/h^2)/(2bh).$$

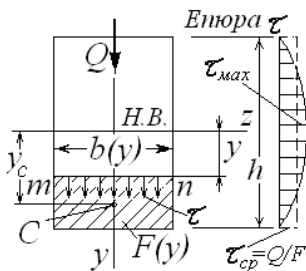


Рисунок 6.16

Змінна y входить до формули в другому ступені, отже, епюра τ за формулою парабола. При $y = \pm h/2$ (найвіддаленіші точки від нейтральної осі) буде $\tau = 0$. Для точок нейтрального шару при $y = 0$ дотичні напруження максимальні. Вони матимуть такий вигляд:

$$\tau_{\max} = 3Q/(2bh) = 3Q/(2F).$$

Епюра дотичних напружень τ побудована на рисунку 6.16. Порівняємо одержане максимальне дотичне напруження τ_{\max} із середнім дотичним напруженням $\tau_{cp} = Q/F$, яке знайдено при умові рівномірного розподілу напружень по перерізу. Отже, максимальні дотичні напруження в 1,5 рази більші середніх.

6.7 Косий згин

Раніше було розглянуто прямий згин балок, при якому всі навантаження лежали в одній площині, що проходить через одну з головних осей перерізу. За такого згину вісь балки деформується в площині дії навантажень і згин називається прямим. Згин, при якому площина дії навантажень не збігається з однією з головних осей перерізу, називають *косим*.

Розглянемо консольну балку прямокутного перерізу, до кінця якої прикладена сила P , що утворює кут α із віссю y (рис. 6.17). Розкладемо силу P на дві складові, напрямлені вздовж головних осей перерізу. Далі, користуючись принципом незалежності дії сил, розглянемо косий згин як два прямих згинів у двох взаємно перпендикулярних площинах. Очевидно, що небезпечний переріз буде в закріпленні.

Максимальні згинальні моменти дорівнюватимуть

$$T_x = P \ell \cos \alpha;$$

$$T_y = P \ell \sin \alpha.$$

Нормальні напруження в якійсь точці A перерізу обчислюють за формулами

$$\sigma_{1A} = T_x y / J_x$$

$$\sigma_{2A} = T_y x / J_y$$

де x, y – координати точки A ;

J_x, J_y – моменти інерції перерізу відносно осей x, y .

Сумарне нормальне напруження в точці А таке:

$$\sigma_A = \sigma_{1A} + \sigma_{2A} = T_x y/J_x + T_y x/J_y = P \ell (y \cos \alpha/J_x + x \sin \alpha/J_y). \quad (6.20)$$

Якщо заштрихувати в різних напрямках частини перерізу, у яких діятимуть тільки напруження розтягу σ_{1A} і σ_{2A} , то побачимо, що в зоні, заштрихованій у клітинку, діятимуть сумарні напруження розтягу, а в не заштрихованій – сумарні напруження стиску (рис. 6.17). Очевидно також, що максимальні напруження розтягу виникають у точці В, а максимальні напруження стиску – у точці С перерізу. Епюри нормальних напружень зображено на рисунку 6.17. Оскільки на нейтральній осі напруження $\sigma = 0$, то рівняння цієї осі має вигляд

$$y \cos \alpha/J_x + x \sin \alpha/J_y = 0,$$

де x, y – поточні координати точок нейтральної осі.

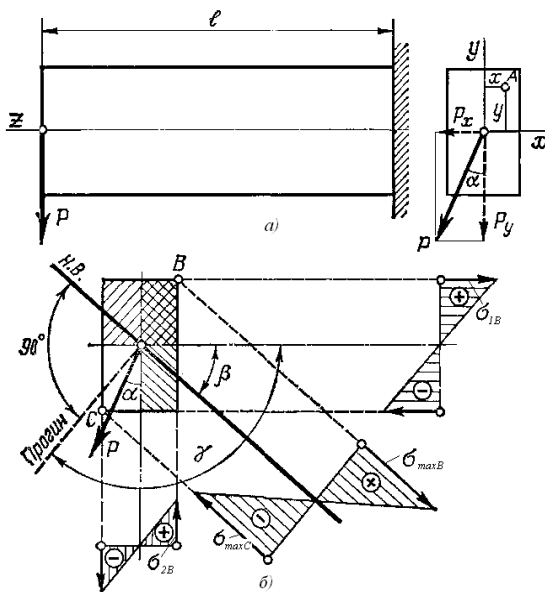


Рисунок 6.17

Відповідно до рівняння, що нейтральною віссю є пряма лінія, яка проходить через початок координат, тобто через центр ваги перерізу балки. Визначимо кут β , який нейтральна вісь утворює з віссю x

$$\operatorname{tg} \beta = y/x = -J_x \sin \alpha / (J_y \times \cos \alpha) = - (J_x / J_y) \operatorname{tg} \alpha.$$

Із цієї рівності видно, що коли $J_x \neq J_y$, то $\beta \neq \alpha$ і нейтральна вісь не перпендикулярна до лінії дії сили P .

Умови міцності балки при косому згині мають такий вигляд:

– для напружень розтягу:

$$\sigma_{\max B} = T_x y_B / J_x + T_y x_B / J_y = P \ell (y_B \cos \alpha / J_x + x_B \sin \alpha / J_y) \leq [\sigma]_{\text{роз}}; \quad (6.21)$$

– для напружень стиску:

$$\sigma_{\max C} = T_x y_C / J_x + T_y x_C / J_y = P \ell (y_C \cos \alpha / J_x + x_C \sin \alpha / J_y) \leq [\sigma]_{\text{ст}}. \quad (6.22)$$

У разі неплоского згинання умова міцності набуває вигляду

$$\sigma_{\max} = T_x / W_x + T_y / W_y \leq [\sigma], \quad (6.23)$$

де $W_x = J_x / y_{\max}$, $W_y = J_y / x_{\max}$ – моменти опору перерізу відповідно осей x і y

6.8 Диференціальне рівняння пружної лінії балки.

Умова жорсткості

При плоскому поперечному згині початкова пряма вісь *перетворюється в плоску криву лінію, яку називають вигнутою віссю або пружною лінією балки.*

Переміщення в довільному перерізі при плоскому згині характеризується прогином y й кутом повороту перерізу $\Theta(x)$ (рис. 6.18). Прогин – це переміщення центра ваги перерізу в напрямі, перпендикулярному до початкової осі, а кут повороту перерізу дорівнює куту між дотичною до зігнутої осі й початковою віссю. Для малих деформацій кути повороту перерізів балки можна визначати за виразом

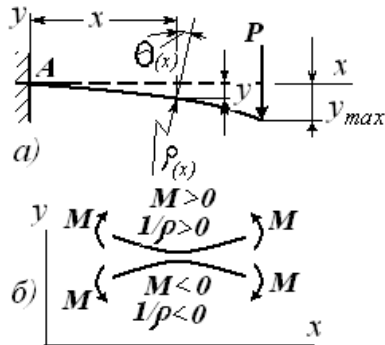


Рисунок 6.18

$$\Theta = dy/dx. \quad (6.24)$$

Запишемо формулу (1.51) і врахуємо, що загалом кривизна $1/\rho$ і згинальний момент T залежать від координати x і виглядають так:

$$1/\rho(x) = T(x)/EJ. \quad (6.25)$$

Кривизну плоскої кривої можна визначити за відомою з математичного аналізу формулою

$$1/\rho(x) = (d^2y/dx^2) / (\pm \sqrt{[1 + (dy/dx)^2]^3}). \quad (6.26)$$

Прирівняємо праві частини рівнянь (6.25) і (6.26), а, також нехтуючи величиною $(dy/dx)^2$ як величиною другого порядку малості, тобто набагато меншою від одиниці, отримаємо таке наближене диференціальне рівняння пружної лінії балки:

$$\pm \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{T(x)}{EJ}. \quad (6.27)$$

Домовимось вісь прогинів у спрямовувати вверху, оскільки при такому напрямі кут повороту перерізів додатний при повороті перерізів проти ходу годинникової стрілки.

У цьому разі при додатному згинальному моменті кривизна також додатна, а при від'ємному згинальному моменті – від'ємна, тобто згинальний момент і кривизна мають однакові знаки (рис. 6.18).

Тому в такому диференціальному рівнянні (6.27) варто зберігати знак «плюс»:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{T(x)}{EJ}. \quad (6.28)$$

Проінтегрувавши це рівняння один раз, отримаємо таке рівняння кутів повороту перерізів (6.24):

$$\frac{dy}{dx} = \theta = \int \frac{T(x)}{EJ} dx + C_1. \quad (6.29)$$

Після другого інтегрування дістанемо таке рівняння вигнутої осі балки, або рівняння прогинів:

$$y(x) = \int dx \int \frac{T(x)}{EJ} dx + C_1 x + C_2. \quad (6.30)$$

Тут C_1 і C_2 – сталі інтегрування визначаються за такими граничними умовами:

– для балки, яка зображена на рисунку 6.18, ці умови записують так:

для $x = 0$ маємо $\Theta_A = 0$, $y_A = 0$;

– для балки на двох шарнірних опорах, яка зображена на рисунку 6.18, дорівнюють нулю прогини на цих опорах:

$$y_A = 0, \quad y_B = 0.$$

Зауважимо, що вплив поперечних сил на переміщення при згині залежить насамперед від відношення довжини балки ℓ до висоти її перерізу h . Для балок із відношенням $\ell/h \geq 10$ впливом поперечних зусиль на величину прогинів можна нехтувати [1]. Прогини й кути повороту перерізів для балок із декількома ділянками, на яких залежності $T(x)$ є різними, визначають, складаючи рівняння (6.28) для кожної окремої ділянки з подальшим інтегруванням. Для зменшення числа сталих інтегрування рекомендується:

- 1) початок системи координат потрібно вибирати в крайній лівій точці балки й робити його загальним для всіх ділянок;
- 2) доданок від зовнішнього зосереджуваного моменту m варто помножити на множник $(x - a)^0$, що дорівнює одиниці. Тут a – абсциса точки, де прикладений момент m ;
- 3) у разі обривання розподіленого навантаження його продовжують до кінця, а для збереження дійсного навантаження вводять доданок, що «компенсує» дійсне навантаження;
- 4) інтегрування рівнянь виконують, не розкриваючи дужок.

Жорсткість балок при згині оцінюють за максимальними прогинами $f = y_{\max}$ і максимальними кутами повороту поперечних перерізів Θ_{\max} . Умови жорсткості записують так:

$$f \leq [f]; \quad \Theta_{\max} \leq [\Theta]. \quad (6.31)$$

Припустимі прогини $[f]$ і кути повороту поперечних перерізів $[\Theta]$ встановлюють для технічних об'єктів з урахуванням конкретних умов їхньої експлуатації. Припустимі прогини $[f]$ зазвичай вимірюють у долях прольоту ℓ , наприклад, для мостів $[f] = (1/700 - 1/1000)\ell$. Припустимі кути повороту поперечних перерізів $[\Theta]$ вимірюють у радіанах.

Контрольні запитання до розділу 6

1. Який різновид деформації бруса називається згином?
2. Які внутрішні силові фактори діють у поперечному перерізі бруса при прямому згині?
3. Як обчислюють поперечну силу в довільному поперечному перерізі балки? Правило знаків.
4. Як обчислюють згинальний момент у довільному поперечному перерізі балки? Правило знаків.
5. Що називається епюрою поперечних сил, епюрою згинальних моментів?
6. Порядок побудови епюр Q та M .

7. Диференціальні залежності між $q(z)$, $Q(z)$ та $M(z)$.
8. Правила перевірки правильності епюр $Q(z)$ та $M(z)$.
9. За якою формулою визначають нормальні напруження в поперечному перерізі бруса при чистому згині?
10. Як розподіляються нормальні напруження за висотою та шириною поперечного перерізу балки при чистому згині?
11. Як називається і де виникають максимальні нормальні напруження у перерізі стрижня при згині?
12. Що зветься осевим моментом опору площі перерізу і як його визначають для круглого та прямокутного перерізів балки? Його розмірність.
13. Як розраховують балку на міцність при згині за нормальними напруженнями? Який переріз приймають за небезпечний?
14. За якими формулами визначають при згині потрібні розміри прямокутного, круглого та двотаврового перерізів балки?
15. Які форми поперечних перерізів балки найраціональніші для згину?
16. За якою формулою визначають дотичні напруження в балках при поперечному згині?
17. Що називається косим згином? За якими формулами визначають нормальні напруження в умовах косого згину?
18. За якими формулами визначають нормальні напруження в умовах косого згину?
19. Які умови жорсткості балок при згині?

7 ГІПОТЕЗИ МІЦНОСТІ

Найважливішим завданням інженерного розрахунку є оцінка міцності елементів конструкцій за відомим напруженим станом. Досить просто ця задача розв'язується для простих різновидів деформацій або при поєднанні головних деформацій, коли в поперечних перерізах бруса виникають тільки нормальні напруження, які в кожній точці перерізу можна визначити.

Проте часто трапляються та мають велике практичне значення випадки поєднання головних деформацій, коли в поперечних перерізах виникають нормальні й дотичні напруження, розподілені нерівномірно й за різними законами. У таких випадках визначити величини, що характеризують міцність, неможливо, оскільки оцінки міцності деталі доводиться враховувати механічні характеристики певного матеріалу, добути з діаграми розтягу.

Як відомо, міцність пластичних матеріалів на розтяг характеризують границею текучості, а крихких – границею міцності. Ці напруження вважають граничними й залежно від них обчислюють припустимі напруження.

Гіпотези міцності – це наукові припущення про головні причини настання в матеріалі граничного напруженого стану при поєднанні головних деформацій.

Напружені стани при поєднанні головних деформацій і при одновісному розтягу називатимемо рівнонебезпечними або еквівалентними, якщо їхні головні напруження відрізняються від граничної для певного матеріалу в однакову кількість разів, інакше кажучи, коефіцієнти запасу міцності для еквівалентних напружених станів однакові.

Еквівалентним напруженням $\sigma_{екв}$ називають таке умовне напруження одновісного розтягу, яке рівнонебезпечне заданому випадку поєднання головних деформацій. Відповідно до гіпотез міцності виводять формули для розрахунку еквівалентного напруження, яку потім зіставляють із допустимим напруженням на розтяг $[\sigma]$, тобто умова міцності має такий вигляд:

$$\sigma_{екв} \leq [\sigma]. \quad (7.1)$$

Сформулюємо й охарактеризуємо деякі гіпотези міцності та наведемо відповідні формули для обчислення еквівалентних напружень.

Першу теорію міцності, в основі якої лежить гіпотеза найбільших нормальних напружень і яка сформульована Галілеєм, можна записати так:

$$\sigma_{еквI} = |\sigma|_{\max} \leq [\sigma]. \quad (7.2)$$

Вона дає задовільні результати для дуже крихких матеріалів (камінь, цегла тощо).

Друга теорія міцності, в основі якої лежить гіпотеза найбільших лінійних деформацій, розроблена Маріоттом і має вигляд

$$\sigma_{еквII} = \sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (7.3)$$

Ця теорія підтверджується для крихких матеріалів типа легового чавуну, високоміцних сталей.

Третя теорія міцності (гіпотеза найбільших дотичних напружень). Згідно з цією гіпотезою, яка запропонована Кулоном, небезпечний стан матеріалу настає тоді, коли найбільші дотичні напруження досягають граничної величини.

У пункті 3.5 було встановлено, що під час одновісного розтягу бруса максимальне дотичне напруження в похилій площині дорівнює половині максимального нормального напруження. Звідси випливає, що граничне дотичне напруження дорівнює половині граничного нормального напруження:

$$\tau_{zp} = \sigma_{zp} / 2.$$

Тобто умова міцності у разі простого розтягання має вигляд

$$\tau_{\max} \leq [\tau] = [\sigma] / 2, \quad (7.4)$$

У разі плоского напруженого стану максимальне дотичне напруження дорівнює піврізниці головних напружень і виглядатимуть так:

$$\tau_{\max} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2 = (\sigma_1 - \sigma_2) / 2 \leq [\sigma] / 2.$$

Отже, умову міцності для плоского напруженого стану через головні напруження σ_1, σ_2 можна виразити так:

$$\sigma_1 - \sigma_2 \leq [\sigma]. \quad (7.5)$$

Тобто, еквівалентним напруженням за третьою теорією є різниця алгебраїчно найбільшого й найменшого головних напружень, що має такий вигляд:

$$\sigma_{еквIII} = \sigma_1 - \sigma_2. \quad (7.6)$$

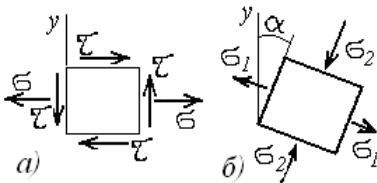


Рисунок 7.1

Розглянемо далі спрощений плоский напружений стан, у якому діють нормальні σ і дотичні τ напруження (рис. 7.1). Такий напружений стан досить часто зустрічається, наприклад, при згині із крученням. Головні напруження в похилих

площадках цієї зони бруса (рис. 7.1) визначаються за формулами

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Отже, максимальні дотичні напруження визначаються як

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Тобто, у цьому разі (рис. 7.1,а) умова міцності для плоского напруженого стану буде така:

$$\sigma_{\text{еквIII}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (7.7)$$

Третя теорія міцності задовільно підтверджується дослідями для пластичних матеріалів, у яких припустимі напруження на розтяг і стиск однакові.

Четверта теорія міцності. Згідно за гіпотезою Мора небезпечний стан матеріалу настає тоді, коли на деякій площадці трапляється найбільш несприятлива комбінація нормальних і дотичних напружень.

Формула для обчислення еквівалентних напружень і умова міцності для спрощеного плоского напруженого стану (рис. 7.1, а) має вигляд

$$\sigma_{\text{еквIV}} = \frac{1-k}{2} \sigma + \frac{1+k}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (7.8)$$

де $k = [\sigma]_p / [\sigma]_c$ – відношення припустимих напружень матеріалу для розтягу $[\sigma]_p$ та стиску $[\sigma]_c$.

Ця формула однаково придатна як для крихких, так і для пластичних матеріалів; коли $k = 1$, вона тотожна із третьою теорією міцності.

П'ята, енергетична теорія міцності. Під час деформації елементарної частинки тіла загалом випадку змінюються її форма й об'єм. Отже, повна потенціальна енергія деформації складається із двох частин: енергії зміни форми й енергії зміни об'єму. Енергетична гіпотеза міцності за критерій переходу матеріалу до граничного стану приймає тільки енергію зміни форми.

Згідно за цією гіпотезою небезпечний стан матеріалу в певній точці настає тоді, коли питома потенціальна енергія зміни форми для цієї точки досягає граничної величини. Формула для обчислення еквівалентних напружень і умова міцності має вигляд

$$\sigma_{еквV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (7.9)$$

Цю теорію міцності для пластичних матеріалів добре підтверджують досліди.

Зазначимо, що в усіх наведених вище формулах τ і σ є нормальними та дотичними напруженнями на площадці поперечного перерізу, який проходить через небезпечну точку.

7.1 Згин і кручення

Одночасних деформацій згину та кручення зазнає більшість валів, які здебільшого належать до прямих стрижнів круглого або кільцевого перерізу.

Для розрахунку валів братимемо до уваги тільки крутний $T_{кр}$ і згинальний T_x моменти, які діють у небезпечному поперечному перерізі, і не братимемо до уваги поперечні сили, оскільки відповідні їм дотичні напруження порівняно невеликі.

Максимальні нормальні й дотичні напруження для круглих валів обчислюють за формулами (2.8) і (6.8):

$$\sigma_{\max} = T_x / W_x; \quad \tau_{\max} = T_{кр} / W_p,$$

де для круглих валів маємо $W_p = 2W_x$; W_x , W_p – осьовий (відносно будь-якої осі перерізу вала) і полярний моменти опору.

У разі одночасного згину й кручення небезпечними будуть точки поперечного перерізу вала, які найбільше віддалені від нейтральної осі.

Застосувавши третю теорію міцності отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{еквIII} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{(T_x / W_x)^2 + 4(T_{кр} / W_p)^2} = \\ &= \sqrt{(T_x / W_x)^2 + 4[T_{кр} / (2W_x)]^2} = \sqrt{T_x^2 + T_{кр}^2} / W_x = T_{еквIII} / W_x, \end{aligned}$$

де $T_{еквIII} = \sqrt{T_x^2 + T_{кр}^2}$ – еквівалентний момент.

Застосувавши енергетичну теорію міцності, матимемо

$$\begin{aligned} \sigma_{еквV} &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{(T_x / W_x)^2 + 3(T_{кр} / W_p)^2} = \\ &= \sqrt{(T_x / W_x)^2 + 3[T_{кр} / (2W_x)]^2} = \sqrt{T_x^2 + 0,75T_{кр}^2} / W_x = T_{еквV} / W_x, \end{aligned}$$

де $T_{еквV} = \sqrt{T_x^2 + 0,75T_{кр}^2}$.

Вали зазвичай виготовляють із матеріалу, в якого припустимі напруження на розтяг і стиск однакові:

$$[\sigma]_{роз} = [\sigma]_{ст.} = [\sigma].$$

Тобто умова міцності для круглих валів набуде вигляду

$$\sigma_{екв} = T_{екв}/W_x \leq [\sigma]. \quad (7.10)$$

Отже, за розрахунковою формулою (7.10) круглі вали розраховують як на згин, але не за згинальним, а за еквівалентним моментом $T_{екв}$, який визначають використовуючи третю або п'яту теорію міцності.

Особливості використання теорій міцності розглянемо на такому прикладі.

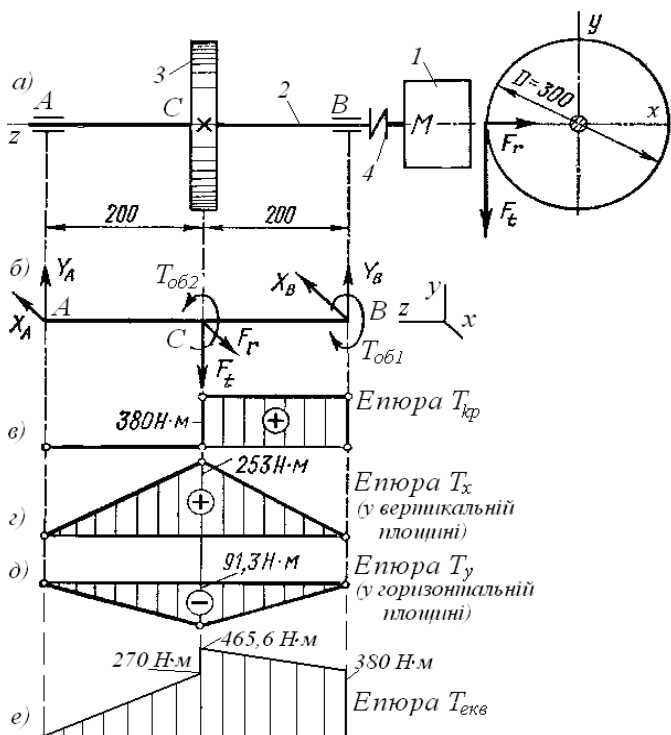


Рисунок 7.2

Приклад 7.1. Перевірити міцність вала зубчастої передачі. Вал виготовлено зі сталі Ст4, межа текучості для якої $\sigma_m = 260$ МПа, діаметр вала $d = 35$ мм. Схему вала зображено на рисунку 7.2, де 1 – двигун, 2 – вал, 3 – зубчасте колесо, 4 – муфта, яка з’єднує вал двигуна з валом 2. Розміри на схемі подано в міліметрах. Потужність, яка передається від двигуна становить $P = 40$ кВт, частота обертання вала $n = 1000$ об/хв, припустимий коефіцієнт запасу міцності $[n] = 3$. Для розрахунку застосувати третю теорію міцності. Визначити на кожній ділянці необхідний діаметр вала.

Розв’язання. Зобразимо розрахункову схему вала (рис. 7.2). Зубчасте колесо 3 за допомогою сил взаємодії між зубцями зубчастих коліс F_t (окружне зусилля), F_r (радіальне зусилля) обертає інше зубчасте колесо, яке на схемі не зображено. Сили F_t , F_r перенесемо до осі вала у точку C і додамо (згідно за теоремою про паралельне перенесення сили F_t) пару сил $T_{o\delta 2}$, момент якої буде $T_{o\delta 2} = F_t \cdot D/2$. Отже, у перерізах B і C до вала прикладені обертові моменти від двигуна $T_{o\delta 1}$ і $T_{o\delta 2}$ від колеса 3.

Визначаємо обертальний момент від двигуна у такий спосіб:

$$T_{o\delta 1} = P/\omega,$$

де кутова швидкість $\omega = \pi n/30 = \pi 1000/30 = 104,7$ рад/с.

Обчислюємо $T_{o\delta 1} = 40 \cdot 10^3 / 104,7 = 380$ Н·м.

Записуємо рівняння рівноваги $\sum M_z = T_{o\delta 1} - T_{o\delta 2} = 0$ і знаходимо $T_{o\delta 2} = T_{o\delta 1} = 380$ Н·м.

Визначаємо крутні моменти на кожній ділянці вала так: $T_{крAC} = 0$, $T_{крCB} = T_{o\delta 1} = 380$ Н·м.

На ділянці BC обертальний момент не змінюється й єпою крутного моменту – пряма, яка паралельна осі (рис. 7.2), а на ділянці AC єпою співпадає з віссю (крутний момент дорівнює нулю).

Визначаємо окружне зусилля $F_t = 2 T_{o\delta 1} / D = 2 \cdot 380 / 0,3 = 2530$ Н і радіальне зусилля [3] $F_r = F_t \cdot \tan \alpha = 0,36 F_t = 0,36 \cdot 2530 = 913$ Н, де $\alpha = 20^\circ$ – кут зацеплення.

Будуємо єпору згинальних моментів у вертикальній площині (рис. 7.2).

Визначаємо реакції опор із рівнянь $\sum M_B = 0$, $\sum M_A = 0$:

$$y_A = y_B = F_t \cdot CB / AB = 1265 \text{ Н.}$$

Згинальний момент на опорах дорівнює нулю $T_{xA} = T_{xB} = 0$. Максимальний згинальний момент у перерізу C такий:

$$T_{xC} = y_A \cdot AC = 1265 \cdot 0,2 = 253 \text{ Н·м.}$$

Будуємо епюру згинаючих моментів T_x у вертикальній площині (рис. 7.2).

Радіальне зусилля F_r згинатиме вал у горизонтальній площині. Розраховуємо епюру згинальних моментів у горизонтальній площині.

Визначаємо реакції опор із рівнянь $\sum M_B = 0$, $\sum M_A = 0$:

$$x_A = x_B = F_r CB/AB = 457 \text{ Н.}$$

На опорах згинальний момент дорівнює нулю $T_{yA} = T_{yB} = 0$.

Максимальний згинальний момент від дії сили F_r буде на середині вала; його значення

$$T_{yC} = x_A \cdot AC = 457 \cdot 0,2 = 91,3 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

Будуємо епюру згинаючих моментів у горизонтальній площині (рис. 6.2).

Повний згинальний момент визначаємо за формулою

$$T_{32} = \sqrt{T_x^2 + T_y^2},$$

і тому $T_{32A} = 0$, $T_{32C} = 270 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $T_{32B} = 0$.

Розраховуємо еквівалентні моменти на межах кожної ділянки, застосовуючи третю теорію міцності згідно з такою формулою (7.9):

$$T_{еквIII} = \sqrt{T_{32}^2 + T_{kp}^2}.$$

Обчислюємо таке:

перша ділянка AC : $T_{еквA1} = 0$, $T_{еквC1} = \sqrt{270^2 + 0} = 270 \text{ Н}\cdot\text{м}$;

друга ділянка CB : $T_{еквC2} = \sqrt{270^2 + 380^2} = 465,6 \text{ Н}\cdot\text{м}$,

$$T_{еквB2} = \sqrt{0 + 380^2} = 380 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Епюру еквівалентних моментів зображено на рисунку 7.2.

Визначаємо з епюри еквівалентних моментів положення небезпечного перерізу (рис. 7.2, е). Він знаходиться у місці закріплення зубчастого колеса – переріз С.

Записуємо умову міцності (7.9): $\sigma_{екв} = T_{екв}/W_x \leq [\sigma] = \sigma_m/[n]$ і перевіряємо її виконання:

$$\sigma_{екв} = 465,6 \cdot 10^3 / 4288 = 108 \text{ МПа} > 260/3 = 87 \text{ МПа},$$

де $W_x = 0,1d^3 = 0,1 \cdot 35^3 = 4288 \text{ мм}^3$, формула 6.12.

З отриманого співвідношення випливає, що міцність вала недостатня – умова міцності не виконується.

Враховуючи епюру $T_{екв}$, вал можна на ділянках AC і CB виконати різних діаметрів.

Обчислимо необхідний діаметр вала, враховуючи залежності (7.10) і (6.12):

на ділянці CB ($T_{еквC2} = 465,6$ Нм)

$$d_{CB} \geq \sqrt[3]{T_{еквC2} [n] / (0,1 \cdot \sigma_m)} = \sqrt[3]{465,6 \cdot 10^3 \cdot 3 / (0,1 \cdot 260)} = 37,7 \text{ мм} \approx 38 \text{ мм},$$

на ділянці AC ($T_{еквC1} = 270$ Нм)

$$d_{AC} \geq \sqrt[3]{T_{еквC1} [n] / (0,1 \cdot \sigma_m)} = \sqrt[3]{270 \cdot 10^3 \cdot 3 / (0,1 \cdot 260)} = 31,5 \text{ мм} \approx 32 \text{ мм}.$$

7.2 Кручення й розтяг (стиск)

Одночасних деформацій кручення та розтягу зазнають, наприклад, болти й кріпильні гвинти, а деформації кручення й стиску – гвинти домкратів і гвинтових пресів, а також свердла й шпинделі свердильних верстатів. Ці деталі зазвичай виготовляють із матеріалів, для яких $[\sigma]_{роз} = [\sigma]_{ст} = [\sigma]$.

Нормальні й максимальні дотичні напруження в цих випадках обчислюють за такими формулами:

$$\sigma = N/F, \quad \tau_{\max} = T_{кр} / W_p.$$

Застосувавши третю теорію міцності, знайдемо розрахункову формулу

$$\sigma_{еквIII} = \sqrt{(N/F)^2 + 4(T_{кр} / W_p)^2} \leq [\sigma]. \quad (7.11)$$

де N , F , $T_{кр}$, W_p , $[\sigma]$ – відповідно повздовжня сила, площа поперечного перерізу, крутний момент, полярний момент опору круглого бруса й припустимі напруження при розтягу.

Використовуючи енергетичну (п'яту) теорію міцності, матимемо

$$\sigma_{еквV} = \sqrt{(N/F)^2 + 3(T_{кр} / W_p)^2} \leq [\sigma]. \quad (7.12)$$

Контрольні запитання до розділу 7

1. Як виконуються розрахунки за допомогою гіпотез міцності?
2. Який фактор приймається за визначальний у процесі побудови першої теорії міцності? Рекомендації щодо її використання.
3. Який фактор приймається за визначальний у процесі побудови другої теорії міцності? Рекомендації щодо її використання.
4. Який фактор приймається за визначальний у процесі побудови третьої теорії міцності? Рекомендації щодо її використання.
5. Який фактор приймається за визначальний у процесі побудови четвертої теорії міцності? Рекомендації щодо її використання.
6. Який фактор приймається за визначальний у процесі побудови п'ятої теорії міцності? Рекомендації щодо її використання.
7. Які деталі зазнають зазвичай деформацій згину та кручення?
8. Які внутрішні силові фактори діють у поперечному перерізі бруса в умовах дії згину та кручення?
9. Як визначають у разі одночасного згину й кручення еквівалентний моментом $T_{екв}$, використовуючи третю або п'яту теорії міцності?
10. За якими формулами визначають напруження в умовах дії згину з крученням у поперечному перерізі вала круглого профілю?
11. Як розраховують розміри перерізу круглого вала на міцність при згині з крученням?
12. Як визначають у разі одночасного кручення та розтягу (стиску) напруження в поперечному перерізі деталі?

8 МІЦНІСТЬ ПРИ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

8.1 Явище втомленості матеріалів

У попередніх розділах розглядалися розрахунки на міцність при статичному навантаженні елементів конструкцій. Проте багато деталей машин працює в таких умовах, коли напруження, які виникають у них, періодично змінюються за величиною або за величиною та знаком. Опір конструкцій дії таких навантажень істотно відрізняється від опору дії статичного навантаження.

До деталей, які зазнають змінних навантажень, належать, наприклад, осі, вали, рейки потягу, трамвая, штоки поршневих машин тощо. Під час обертання осі вагона ті самі волокна бувають то в зоні розтягу, то в зоні стиску. Шток поршневої машини зазнає змінних навантажень, до того ж знак напружень змінюється залежно від напрямку руху поршня (розтяг – стиск).

Досліди й аналіз поломок різних деталей машин доводить, що матеріали (зокрема метали), які тривалий час зазнавали дії змінних навантажень, можуть руйнуватися при нижчих напруженнях, ніж границя міцності й навіть межа текучості. Руйнування при цьому відбувається тому, що після певної кількості змін напряду дії навантаження в деталі виникають мікротріщини, які поступово збільшується, і врешті-решт деталь руйнується, не виявивши при цьому помітних залишкових деформацій навіть тоді, коли матеріалу деталі властива висока пластичність.

Руйнування матеріалу, спричинене багаторазовою дією змінних напружень, називають *втомленістю*.

Виникнення мікротріщин здебільшого є результатом неоднорідності будови матеріалів, наявності слідів механічної обробки й пошкоджень поверхні деталі (волосовини, раковини, газові та шлакові включення, подряпини, сліди різця або шліфувального каменю тощо), а також результатом концентрації напружень.

Здатність матеріалів протистояти втомленості називають *опором втомленості*. Вивчення в опорі матеріалів питань втомленості має дуже велике значення, оскільки такі важливі деталі, як осі трамвайних і залізничних вагонів, колінчасті вали, гребні гвинти, поршневі пальці, пружини, шатуни двигунів і багато інших, виходять із ладу переважно внаслідок руйнувань від втомленості.

Введемо головні визначення.

Час однієї зміни напружень називають *періодом*. Циклом напружень називають сукупність усіх значень напружень σ (або τ) за час одного періоду T (рис. 8.1).

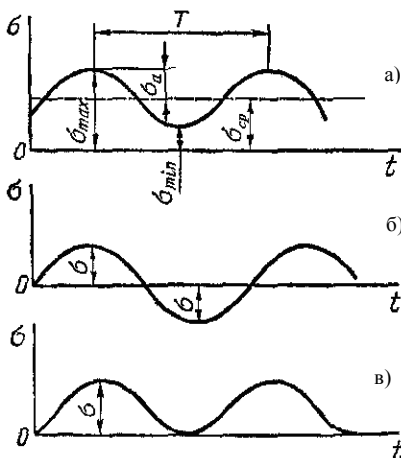


Рисунок 8.1

Цикл змінних напружень (рис. 8.1) характеризують такими параметрами:

- 1) максимальним напруженням σ_{\max} ;
- 2) мінімальним напруженням σ_{\min} ;
- 3) середнім напруженням $\sigma_{cp} = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2$;
- 4) амплітудою циклу $\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$;
- 5) коефіцієнтом асиметрії циклу $r_\sigma = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$.

Зазначимо, що цикли, які мають однаковий коефіцієнт асиметрії, називають *подібними*.

На рисунку 8.1, а, б, в зображено відповідно таке:

- при $\sigma_{\max} \neq \sigma_{\min} \neq 0$ маємо *асиметричний цикл* (рис. 8.1, а);
- при $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$, $\sigma_{cp} = 0$, $r_\sigma = -1$ відбувається *симетричний цикл* (рис. 8.1, б);
- при $\sigma_{\max} \neq 0$, $\sigma_{\min} = 0$ маємо *віднульовий цикл* зміни напружень (рис. 8.1, в).

Усі наведені тут і далі означення та співвідношення дійсні також для змінних дотичних напружень, потрібно тільки замінити в позначеннях і формулах σ на τ .

Змінні напруження можуть мати стаціонарний (сталі) або нестаціонарний (несталі) режим. За стаціонарним режимом кожний новий цикл повторює попередній. За нестаціонарним режимом внаслідок напружень і їхні максимальні значення змінюються від циклу до циклу.

Максимальне значення періодично змінного напруження, при якому матеріал може необмежено довго чинити опір руйнуванню, називають *межею витривалості*.

Межу витривалості для змінних напружень позначають при симетричному циклі σ_{-1} , при віднульовому циклі – σ_0 , а при циклі з коефіцієнтом асиметрії циклу r_σ як σ_r .

Для визначення границі витривалості зразки випробують на спеціальних машинах. Найпоширеніші випробування на згин при симетричному циклі навантаження. Для цього зразки навантажують до деяких напружень σ_1 , σ_2 , тощо та фіксують відповідні числа циклів N_1 , N_2 до руйнування зразка. За результатами випробувань будують криву втомленості (рис. 8.2). Ця крива асимптотично наближається до деякої горизонтальної прямої, що відсікає на осі ординат відрізок, величиною якого й визначається як межа витривалості σ_{-1} .

Практика показує, що сталевий (або чавунний) зразок, який витримав 10^7 циклів (це число називають *базою випробувань* N_0), може витримати також необмежене число циклів.

Експериментально встановлено, що при будь-якому асиметричному циклі (наприклад, віднульовому) границя витривалості для того самого матеріалу буде вища, ніж при симетричному циклі. Це означає, що *симетричний цикл найбільш небезпечний*.

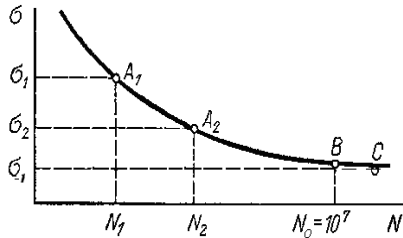


Рисунок 8.2

Для кольорових металів межу витривалості визначають зазвичай при базі випробувань $5 \cdot 10^7$ або 10^8 циклів.

Межа витривалості значною мірою залежить від різновиду деформації. Випробування на витривалість при розтягу – стиску й крученні проводять рідше, оскільки вони потребують складнішого обладнання, ніж у разі згину. Тому межі витривалості при розтягу й крученні визначають з емпіричних формул за відомою межею витривалості при симетричному циклі згину.

Для багатьох матеріалів границі витривалості визначені й наводяться в довідниках.

На величину границі витривалості, крім характеристик циклу, впливає низка додаткових факторів: форма зразка і його розміри; концентрація напружень; стан поверхні; середовище, у якому знаходиться деталь; температура; режим циклічного силового впливу; попередня внутрішня напруженість матеріалу тощо.

Концентрація напружень.

Теоретичними й експериментальними дослідженнями встановлено, що напруження розподілені рівномірно по площі поперечного перерізу розтягнутого або стиснутого бруса тільки тоді, коли поперечні перерізи, або сталі вздовж бруса, або змінюються дуже повільно.

Різкі зміни у формі або площі поперечного перерізу деталей (наявність отворів, виточок, викружок, галтелей, канавок, надрізів тощо) призводять до нерівномірного розподілу напружень, спричиняють *концентрацію напружень*. Причину концентрації напружень (отвір, виточка) називають *концентратором напружень*.

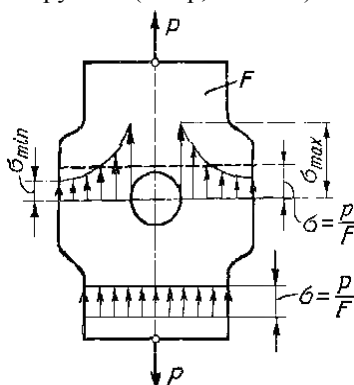


Рисунок 8.3

Розглянемо сталений зразок, який розтягується силою P (рис. 8.3). У поперечному перерізі зразка діє поздовжня сила $N = P$. У цьому разі напруження, яке обчислене із припущенням, що концентрації напружень немає, називають *номінальним напруженням* і воно дорівнює

$$\sigma = N/F.$$

Для компенсації послаблення перерізу за допомогою отвору збільшимо ширину зразка, як зображено на рисунку 8.3, так, щоб площа поперечного перерізу, проведеного через вісь отвору, дорівнювала F . Графік розподілу напружень σ біля отвору подано на рисунку 8.3.

Концентрація напружень має місцеве значення, оскільки з віддаленням від концентратора як уздовж деталі, так і поперек, напруження дуже швидко спадають, наближаючись до своїх номінальних значень.

Кількісно концентрацію напружень характеризує *теоретичний коефіцієнт концентрації напружень* α , який дорівнює відношенню найбільшого місцевого напруження біля концентратора напружень до номінального напруження виглядає так:

$$\alpha_{\sigma} = \sigma_{\max}/\sigma. \quad (8.1)$$

Концентрація напружень істотно залежить від різновиду й розмірів концентратора.

Концентрація напружень по-різному впливає на міцність пластичних і крихких матеріалів. Велике значення у цьому разі мають також властивості навантаження. Якщо взяти пластичний матеріал,

навантажений статично, то зі збільшенням навантаження зростання найбільших місцевих напружень припиняється при досягненні межі текучості внаслідок місцевої текучості матеріалу, а в залишку поперечного перерізу напруження зростатимуть. Отже, пластичність матеріалу сприяє вирівнюванню напружень. Коли напруження досягнуть межі текучості по всьому перерізу, то їхній розподіл можна вважати рівномірним. На підставі цього можна дійти висновку про те, що при статичному навантаженні пластичні матеріали малочутливі до концентрації напружень. Вплив концентрації напружень не враховують у разі статичного навантаження при розрахунках на міцність заклепочних і різьбових з'єднань та інших подібних деталей, виготовлених із пластичних матеріалів. Однак при навантаженнях, які швидко змінюються із часом, напруження не встигають вирівнюватись, тому концентрацію напружень потрібно враховувати.

У розрахунках на міцність деталей із крихких матеріалів концентрацію напружень потрібно враховувати й при статичному навантаженні, оскільки нерівномірність розподілу напружень внаслідок їхньої концентрації зберігається на всіх стадіях навантаження (пригадаємо відсутність ділянки текучості в діаграмах розтягу крихких матеріалів).

Міцність при змінних навантаженнях характеризують межею витривалості, тому дійсну оцінку впливу концентратора можна дістати, порівнюючи границі витривалості, визначені з дослідів над гладенькими зразками й над зразками з досліджуваним концентратом при симетричному циклі.

Відношення цих величин називають *ефективним* (тобто дійсним) *коефіцієнтом концентрації напружень* k_σ .

Порівняння показує, що ефективний коефіцієнт концентрації завжди менший від теоретичного. Наприклад, для вала передачі, якщо у перерізу поперечний отвір ефективний коефіцієнт концентрації напружень не більше 2,2, а теоретичний коефіцієнт концентрації дорівнює 3,0.

Вплив розмірів деталі (масштабний фактор). З дослідів встановлено, що межа витривалості залежить від абсолютних розмірів поперечного перерізу зразка: зі збільшенням розмірів перерізу границя витривалості зменшується. Ця закономірність дістала назву *масштабного фактору* k_d ; вона пояснюється тим, що зі збільшенням об'єму матеріалу збільшується ймовірність неоднорідності його структури (шлакові й газові включення тощо), а це призводить до виникнення осередків концентрації напружень. Крім того, зі збільшенням розмірів деталі зменшуються механічна міцність

матеріалу навіть за умови додержання технології термічної обробки; змінюються властивості поверхневого шару після механічної обробки.

Вплив стану поверхні. Здебільшого поверхневі шари деталі, яка зазнає дії циклічних навантажень, виявляються більш напруженими. Крім того, поверхня майже завжди має дефекти, пов'язані з якістю механічної обробки, а також із корозією. Тому на межу витривалості впливають шорсткість і стан поверхні деталі: зі збільшенням шорсткості поверхні межа витривалості знижується. Це пояснюється тим, що після виготовлення деталі на її поверхні є риси, подряпини тощо, біля яких спостерігається концентрація напружень. Вплив стану поверхні оцінюється *коефіцієнтом якості поверхні* k_f .

Для підвищення межі витривалості використовуються різноманітні види зміцнення поверхні деталі (поверхове загартування, хіміко-термічна обробка тощо), які характеризуються *коефіцієнтом поверхового зміцнення* k_v .

Загальний коефіцієнт зниження границі витривалості знаходиться за такою формулою:

$$K = (k_\sigma/k_d + 1/k_f - 1)/k_v. \quad (8.2)$$

На межу витривалості впливають також інші фактори. Це, наприклад: паузи (перерви) у навантажуванні; перевантаження, тобто навантаження, які вищі за границю витривалості; тренування деталі, яке спостерігається, якщо прикласти напруження дещо нижчі за межу витривалості й потім поступово підвищувати навантаження. У цьому разі межу витривалості можна значно підвищити. Крім того, з підвищенням температури межа витривалості зазвичай зменшується, а зі зниженням – збільшується.

8.2 Розрахунки на міцність при змінних напруженнях

Розрахунки на міцність при змінних напруженнях здебільшого перевірні й полягають у тому, що для кожного можливого небезпечного перерізу визначають фактичні коефіцієнти запасу міцності s , які порівнюють із потрібними для певної конструкції коефіцієнтами запасу міцності $[s]$; до того ж має бути дійсною умова

$$s \geq [s]. \quad (8.3)$$

Зазвичай для сталевих деталей $[s] = 1,3\text{--}3$ і більше залежно від різновиду й призначення деталі.

У разі *простих* різновидів деформацій при змінних напруженнях у деталі за *симетричним циклом* запас міцності можна обчислити так:

– при розтягу-стиску або при згині

$$s_{\sigma} = \sigma_{-1} / (K_{\sigma} \sigma_a), \quad (8.4)$$

– для кручення

$$s_{\tau} = \tau_{-1} / (K_{\tau} \tau_a), \quad (8.5)$$

де σ_{-1} – границя витривалості зразка при розтягу-стиску або при згині;

τ_{-1} – те саме при крученні;

σ_a, τ_a – амплітуда змінних напружень;

K_{σ}, K_{τ} – коефіцієнти зниження межі витривалості (8.2).

Для деталей, які навантажені за *асиметричним циклом* запас міцності можна обчислити відповідно при розтягу-стиску, при згині й при крученні за такими формулами:

$$s_{\sigma} = \sigma_{-1} / (K_{\sigma} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_{cp}); \quad (8.6)$$

$$s_{\tau} = \tau_{-1} / (K_{\tau} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_{cp}), \quad (8.7)$$

де σ_{cp}, τ_{cp} – середні напруження циклу;

$\psi_{\sigma}, \psi_{\tau}$ – коефіцієнти зведення асиметричного циклу до рівнонебезпечного симетричного.

Коефіцієнти зведення відбивають вплив асиметрії циклу на величину границі витривалості й обчислюються за такими формулами:

$$\psi_{\sigma} = (2\sigma_{-1} - \sigma_0) / \sigma_0; \quad (8.8)$$

$$\psi_{\tau} = (2\tau_{-1} - \tau_0) / \tau_0, \quad (8.9)$$

де σ_0, τ_0 – межі витривалості зразка при віднульовому циклі.

У разі поєднання головних деформацій (згину й кручення, кручення й розтягу або стиску), тобто для спрощеного плоского напруженого стану, загальний коефіцієнт запасу міцності s визначають із виразу

$$s = s_{\sigma} s_{\tau} / \sqrt{s_{\sigma}^2 + s_{\tau}^2}, \quad (8.10)$$

де s_{σ}, s_{τ} – запас міцності окремо для нормальних і дотичних напружень.

8.3 Розрахунки на міцність у задачах динаміки

Розглянемо приклади розв'язання задач міцності стосовно задач динаміки. До них належать розрахунки, пов'язані із силами інерції, розрахунки на ударні навантаження й на коливання конструкцій.

Розрахунки на міцність при інерційних навантаженнях. У розрахунках, пов'язаних із *силами інерції*, використовують відомий із теоретичної механіки принцип Даламбера (метод кінетостатики), за яким, прикладаючи до рухомої матеріальної точки або рухомого тіла, крім активних і реактивних сил, також сили інерції, розв'язують задачу динаміки методами статки. Пригадаємо, що сила інерції матеріальної точки дорівнює добутку маси точки на її прискорення й напрямлена протилежно прискоренню.

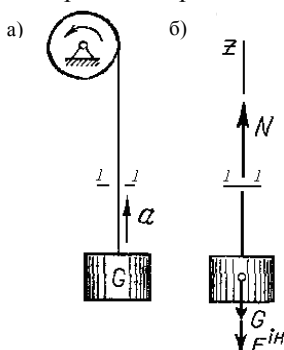


Рисунок 8.4

Приклад 8.1. Визначити потрібну площу F і діаметр d поперечного перерізу троса, який піднімає вантаж $G = 20$ кН (рис. 8.4) з прискоренням $a = 5$ м/с², якщо припустимо напруження для троса $[\sigma] = 75$ МПа; масу троса не враховувати.

Розв'язання. Покажемо силу інерції вантажу $F^{\text{ін}} = ma$, яка напрямлена протилежно прискоренню вантажу. У такому разі можемо за принципом Даламбера розглядати систему «вантаж – трос» як таку, що перебуває в рівновазі.

Застосовуючи метод перерізів, уявно відкинемо верхню частину троса й замінимо її дію поздовжньою силою N , яка виникає в поперечному перерізі 1–1 троса (рис. 8.4).

Складемо таке рівняння рівноваги для залишеної частини:

$$\Sigma Z = 0; \quad N - G - F^{\text{ін}} = 0,$$

$$\text{звідки} \quad N = G + F^{\text{ін}} = G + Ga/g = G(1 + a/g).$$

Запишемо таку умову міцності для троса: $\sigma = N/F \leq [\sigma]$.

Обчислимо площу поперечного перерізу троса у такий спосіб:

$$F \geq N/[\sigma] = G(1 + a/g)/[\sigma] = 20 \cdot 10^3(1 + 5/9,81)/75 \cdot 10^6 = 4 \cdot 10^{-4}(\text{м}^2) = 400(\text{мм}^2).$$

Обчислимо діаметр троса так: $d = \sqrt{4F/\pi} = 23$ мм. Варто зазначити, що формула $F = \pi d^2/4$ для троса досить наближена, оскільки переріз троса складається залежно від призначення й конструкції з певної кількості окремих дротів.

Приклад 8.2. Визначити динамічні напруження в поперечному перерізі тонкостінного кільця з середнім діаметром D , яке рівномірно обертається у своїй площині з кутовою швидкістю ω (рис. 8.5, а). Знайти також значення лінійної швидкості V будь-якої точки кільця і кутової швидкості ω , при якій нормальні напруження в поперечному перерізі не перевищують $[\sigma]_p = 160$ МПа, якщо густина матеріалу $\rho = 0,8 \cdot 10^4$ кг/м³.

Розв'язання. Визначимо внутрішні сили, які виникають у поперечних перерізах кільця. Для цього зробимо переріз 1–1

по горизонтальному діаметру й розглянемо рівновагу залишеної частини (рис. 8.5, б).

За принципом Даламбера прикладемо до кожного елементарного елемента кільця відцентрову силу інерції. Ці сили розподілені рівномірно по колу кільця й напрямлені по радіусу від центра протилежно доцентровому прискоренню. Доцентрове прискорення будь-якої точки кільця, яке рівномірно обертається, напрямлено до центру й дорівнює

$$a_{\text{доц}} = \omega^2 R = V^2 / (D/2).$$

Покажемо елементарну частину кола кільця (рис. 8.5, б), яке відповідає куту $d\varphi$ і на яку припадає сила інерції

$$dq^{in} = ma_{\text{доц}} = \rho F (D/2) d\varphi V^2 / (D/2) = \rho F V^2 d\varphi,$$

де $m = \rho F (D/2) d\varphi$ – маса елементарній частині дуги кільця;

F – площа поперечного перерізу.

Визначимо поздовжні сили N , які виникають у поперечних перерізах. Для цього спроекуємо всі сили, які діють на залишене півкільце, на вісь z .

Проекція сили dq^{in} на вісь z дорівнює $dq^{in} \cos\varphi$.

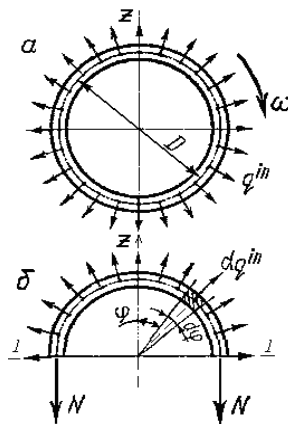


Рисунок 8.5

Оскільки розглядаємо елементарні сили інерції, які напрямлені по радіусу й нахилені до осі z під різними кутами, рівняння рівноваги запишемо в інтегральній формі (кут φ змінюється від $-\pi/2$ до $+\pi/2$):

$$\sum Z = 0; \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho F V^2 \cos \varphi d\varphi - 2N = 0$$

$$\text{або } 2N = \rho F V^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = 2\rho F V^2.$$

Тоді поздовжня сила $N = \rho F V^2$.

Оскільки кільце тонке, то припускаємо, що нормальні напруження розподілені по його поперечному перерізу рівномірно, отже, кільце працює на розтяг.

Нормальні напруження в поперечному перерізі кільця:

$$\sigma = N/F = \rho V^2.$$

Зазначимо, що відповідно до отриманого виразу напруження не залежать від площі поперечного перерізу кільця й пропорційні квадрату лінійної швидкості.

Запишемо умову міцності:

$$\sigma = N/F = \rho V^2 \leq [\sigma],$$

звідси визначимо найбільшу лінійну швидкість:

$$v \leq \sqrt{[\sigma]/\rho} = \sqrt{160 \cdot 10^6 / (0,8 \cdot 10^4)} = 141 \text{ м/с.}$$

Залежно від діаметра кільця D припустима кутова швидкість буде різною:

$$\omega = V/R = 2V/D = 282/D \text{ рад/с.}$$

Розрахунки на міцність при ударних навантаженнях. Робота низки машин пов'язана з ударними навантаженнями, які є наслідками конструктивних факторів: зазори в місцях з'єднання деталей; рух транспорту по нерівностям шляху тощо.

Наближений розрахунок на дію ударного навантаження при осьовому ударі виконують з огляду на такі припущення:

1. Під час удару виникають тільки пружні деформації, тобто після припинення дії ударного навантаження тіло повертає свої початкові форму й розміри.

2. Вважають, що система тіл при співударянні має один ступінь вільності, тобто положення системи визначається однією координатою.

3. Удар вважають абсолютно непружним, тобто ударний вантаж після удару не відскакує від пружної системи, а продовжує в процесі її деформації рухатися разом із нею. У цьому разі немає пружних хвиль у тілах і пов'язаних із ними відскоків тіла, що вдаряє.

4. Маса пружної системи, яка приймає удар, мала порівнюючи з масою ударного тіла, і тому масою пружної системи можна нехтувати.

5. Кінетична енергія падаючого (ударного) тіла повністю переходить у потенціальну енергію деформації елемента конструкції, який сприймає дію удару. У цьому разі нехтують втратами енергії на місцеві пластичні деформації.

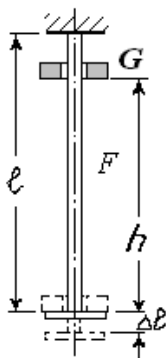


Рисунок 8.6

Розглянемо наближений метод визначення напружень і деформацій стрижня при осьовому ударі.

Приклад 8.2. Вантаж вагою G падає з висоти h на жорсткий диск, який закріплений на кінці стрижня, довжиною ℓ і площи поперечного перерізу якого F . Визначити напруження й деформації стрижня (рис. 8.6). Масою стрижня й диска можна нехтувати.

Розв'язання. Використаємо таку теорему про зміну кінетичної енергії системи (вантаж, стрижень і диск) на переміщенні $h + \Delta\ell$:

$$T_2 - T_1 = \Sigma A_k.$$

Кінетична енергія системи в кінці – T_2 і на початку – T_1 ; переміщення дорівнює нулю – тому що тіла системи в цих положеннях не рухаються. Отже, сума робіт зовнішніх і внутрішніх сил, які діють на тіла системи, дорівнює нулю і має такий вигляд:

$$\Sigma A_k = A_G + A_{def.} = 0,$$

де $A_G = G(h + \Delta\ell)$ – робота сили ваги G ;

$A_{def.} = -\frac{1}{2}(N\Delta\ell) = -\frac{1}{2}(\Delta\ell EF/\ell)\Delta\ell = -(\Delta\ell)^2 EF/(2\ell)$ – робота сил пружності при деформації стрижня (тут використана залежність $\Delta\ell = N\ell/(EF)$ або $N = \Delta\ell EF/\ell$);

E – модуль пружності матеріала стрижня.

Тобто робота, яку виконує вантаж при падінні, дорівнює потенціальній енергії деформації стрижня.

$$\begin{aligned} \text{Тоді} \quad \Sigma A_k &= Gh + G\Delta\ell - (\Delta\ell)^2 EF/(2\ell) = 0 \\ \text{або} \quad (\Delta\ell)^2 - \Delta\ell \, 2G\ell/EF - 2Gh\ell/EF &= 0. \end{aligned}$$

Введемо позначення

$$G\ell/(EF) = \Delta\ell_{\text{ст}}, \quad (8.11)$$

де $\Delta\ell_{\text{ст}}$ – статичне подовження стрижня при дії сили G .

$$\text{Тоді одержимо } (\Delta\ell_{\text{д}})^2 - \Delta\ell_{\text{ст}}^2 - 2h\Delta\ell_{\text{ст}} = 0, \quad (8.12)$$

де $\Delta\ell_{\text{д}}$ – динамічне подовження стрижня.

Розв'язуючи рівняння, знаходимо динамічне подовження

$$\Delta\ell_{\text{д}} = \Delta\ell_{\text{ст}} + \sqrt{\Delta\ell_{\text{ст}}^2 + 2h\Delta\ell_{\text{ст}}}. \quad (8.13)$$

Другий, від'ємний корінь не враховуємо.

Останній вираз запишемо так:

$$\Delta\ell_{\text{д}} = \Delta\ell_{\text{ст}} (1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta\ell_{\text{ст}}}). \quad (8.14)$$

Введемо так званий коефіцієнт динамічності

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta\ell_{\text{ст}}}. \quad (8.15)$$

Тоді

$$\Delta\ell_{\text{д}} = k_{\text{д}} \Delta\ell_{\text{ст}}. \quad (8.16)$$

Тобто *переміщення, які виникають від дії ударного навантаження, дорівнюють добутку коефіцієнта динамічності на переміщення від статично прикладеного навантаження.*

Згідно з лінійною залежністю між напруженнями й переміщеннями, а також припускаючи, що модулі пружності при статичній і ударній дії навантажень однакові, можна записати зв'язок між статичним і динамічним напруженням, що має такий вигляд:

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \sigma_{\text{ст}}, \quad (8.17)$$

де $\sigma_{\text{ст}}$ – напруження, які виникають в стрижні при дії сили, що дорівнює вазі падаючого вантажу:

$$\sigma_{\text{ст}} = G/F. \quad (8.18)$$

Отже, *визначення переміщень і напружень при динамічних навантаженнях зводиться до визначення переміщень і напружень при статичних навантаженнях і обчислення коефіцієнта динамічності.*

Якщо $h = 0$, тобто коли вантаж не падає, а прикладається раптово, тоді

$$k_{\text{д}} = 2; \Delta\ell = 2\Delta\ell_{\text{ст}} \text{ і } \sigma_{\text{дин}} = 2\sigma_{\text{ст}},$$

тобто переміщення та напруження внаслідок дії миттєво прикладеної сили в два рази більше, ніж при статичній дії тієї самої сили.

З наведених формул (8.15) видно, що коефіцієнт динамічності k_d зменшується, коли збільшується $\Delta \ell_{ст}$ (див. 8.11), тобто зі зменшенням жорсткості пружної конструкції.

Тому для пом'якшення ударів широко застосовують пружини й ресори, що мають значну податливість (малу жорсткість).

Якщо висота падіння h значно перевищує $\Delta \ell_{ст}$, то коефіцієнт динамічності можна обчислювати за наближеною формулою

$$k_d = \sqrt{2h / \Delta \ell_{ст}}. \quad (8.19)$$

Контрольні запитання до розділу 8

1. Яке навантаження називають статичним, а яке динамічним? Які різновиди динамічного навантаження?

2. Яке явище називають втомленістю матеріалу?

3. Назвіть параметри, які характеризують цикл змінних напружень.

4. Як визначаються: середнє напруження, амплітуда, коефіцієнт асиметрії циклу?

5. Які цикли називають подібними?

6. При яких співвідношеннях максимальних і мінімальних напруженнях відбувається: асиметричний, симетричний і віднульовий цикли зміни напружень?

7. Який цикл змінних напружень найбільш небезпечний?

8. Яку характеристику міцності при змінних напруженнях називають межею витривалості?

9. Які фактори, крім характеристик циклу, впливають на величину границі витривалості?

10. Назвіть причину концентрації напружень?

11. Як визначається теоретичний коефіцієнт концентрації напружень?

12. Яка умова міцності деталі при змінних напруженнях?

13. У чому полягає принцип Даламбера (принцип кінетостатики)? Як його застосовують при розв'язанні задач з урахуванням сил інерції?

14. Як визначаються переміщення і напруження при динамічних навантаженнях за допомогою коефіцієнта динамічності?

9 СТІЙКІСТЬ СТИСНЕНИХ СТРИЖНІВ

9.1 Поздовжній згин

У розрахунках на міцність і жорсткість, наведених у попередніх розділах, припускалося, що під час деформації конструкції між зовнішнім навантаженням і внутрішніми силами пружності була стійка форма рівноваги, тобто така, при якій малим збуджувальним діям відповідають малі відхилення статично навантаженої конструкції від початкової форми.

Навантаження $P_{кр}$, при яких втрачається стійкість, називають критичним, а відповідні стан – критичним станом. Небезпека втрати стійкості особливо велика для легких, тонкостінних конструкцій типу гнучких стержнів, пластинок і оболонок. Явища втрати стійкості різноманітні. Найважливіші такі випадки прояву нестійкості:

- 1) виникнення якісно нових форм рівноваги;
- 2) зникнення стійких форм рівноваги.

Прикладом може бути центральний стиск прямого пружного стрижня (рис. 9.1). При невеликих значеннях стискальної сили $P < P_{кр}$ – прямолінійна форма стрижня єдина й до того ж має стійку форму рівноваги. Малим збудженням цієї форми, які виникають, наприклад, під час невеликого додаткового поперечного навантаження, відповідають малі прогини.

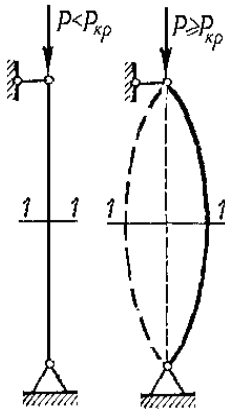


Рисунок 9.1

При критичному значенні стискальної сили $P_{кр}$ прямолінійна форма стає нестійкою та при збільшенні навантаження до моменту руйнування залишкові деформації нарастають надто швидко. Отже, при розрахунках на стійкість критичне навантаження подібно руйнівальному при розрахунках на міцність.

Згин, пов'язаний із втратою стійкості стрижня прямолінійної форми, називається поздовжнім згином.

Застосовуючи метод перерізів (переріз 1–1, рис. 9.1), упевнюємось, що внаслідок викривлення осі в поперечних перерізах стрижня виникають два внутрішні силові фактори – поздовжня сила $N = P$ і згинальний момент T . Отже, викривлений стрижень зазнає одночасно деформацій центрального стиску й поперечного згину.

Критичний стан, який безпосередньо передує руйнуванню, недопустимий у реальних умовах експлуатації. У зв'язку із цим визначення критичних навантажень є відповідальною частиною розрахунку конструкції й дає можливість уникнути втрати стійкості введенням відповідного допустимого коефіцієнта запасу стійкості.

Щоб забезпечити стійкість, необхідно, щоб стискальна сила P , яка діє на стрижень, була менша за припустиму силу $[P]$, тобто повинна виконуватись умова

$$P \leq [P], \quad (9.1)$$

$$\text{де } [P] = P_{кр} / [n]_{ст.}; \quad (9.2)$$

$P_{кр}$ – критична сила;

$[n]_{ст.} > 1,0$ – припустимий коефіцієнт запасу стійкості.

Значення коефіцієнта запасу стійкості залежить від призначення стрижня і його матеріалу. Зазвичай для сталей $[n]_{ст.} = 1,8-3$; для чавунів $[n]_{ст.} = 5-5,5$; для дерева $[n]_{ст.} = 2,8-3,2$.

9.2 Розрахунки стержнів на стійкість

Відповідно до (9.2) для розрахунків стиснених стрижнів на стійкість потрібно знати способи визначення критичної сили $P_{кр}$. Наведемо *формулу Ейлера* для визначення критичної сили:

$$P_{кр} = \pi^2 E J_{\min} / \ell_{зв}^2, \quad (9.3)$$

де E – модуль пружності першого роду;

J_{\min} – найменший з осевих моментів інерції перерізу, оскільки стрижень викривляється в площині найменшої жорсткості, у чому легко впевнитись, стискаючи поздовжньою силою слюсарну лінійку;

$\ell_{зв} = \mu \ell$ – зведена довжина стрижня;

ℓ – довжина стрижня;

μ – коефіцієнт зведення довжини, який залежить від способу кріплення кінців стрижня.

На рисунку 9.2 зображено схеми кріплення кінців стрижня, які найчастіше застосовують, і наведено такі значення μ :

а) стрижень із шарнірно закріпленими кінцями, які можуть зближуватися;

б) нижній кінець жорстко закріплений, верхній вільний;

в) обидва кінці жорстко закріплені, але можуть зближуватися;

г) нижній кінець закріплений жорстко, верхній – шарнірно, кінці можуть зближуватися;

д) нижній кінець закріплений жорстко, верхній має «плаваюче» кріплення.

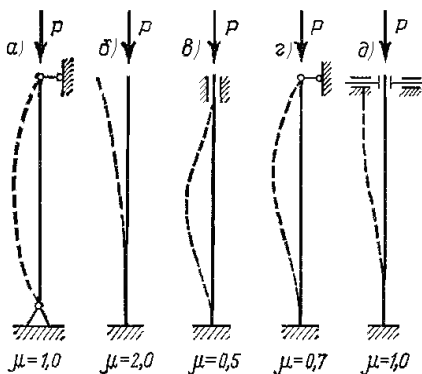


Рисунок 9.2

обидва кінці стрижня.

Виведення формули Ейлера ґрунтується на законі Гука, який дійсний доти, доки напруження не перевищує межі пропорційності. Тому формулою Ейлера можна користуватися не завжди. Для визначення межі застосовності формули Ейлера знайдемо критичне напруження $\sigma_{кр}$, тобто напруження, яке виникає в поперечному перерізі стрижня, площа якого F , під дією критичної сили така:

$$\sigma_{кр} = P_{кр} / F = \pi^2 EJ_{\min} / [(\mu \ell)^2 F]. \quad (9.4)$$

Введемо таке поняття *найменшого радіуса інерції* i_{\min} поперечного перерізу стрижня:

$$i_{\min} = \sqrt{J_{\min} / F}. \quad (9.5)$$

Перетворимо формулу для $\sigma_{кр}$:

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / (\mu \ell / i_{\min})^2. \quad (9.6)$$

$$\lambda = (\mu \ell / i_{\min}) \quad (9.7)$$

називають *згучкістю стрижня*. Це безрозмірна величина, яка характеризує вплив розмірів стрижня та способу закріплення його кінців. Остаточно

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2. \quad (9.8)$$

Формулою Ейлера можна користуватися тільки тоді, коли виконується умова

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2 \leq \sigma_{нц}, \quad (9.9)$$

де $\sigma_{нц}$ – межа пропорційності матеріалу стрижня. Отже,

$$\lambda \geq \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{нц}}.$$

Зазначимо, що чим менше μ , тим більша критична сила, а отже, і припустиме стискальне навантаження. Наприклад, стискальне навантаження стрижня, жорстко закріпленого обома кінцями ($\mu = 0,5$), може бути в 16 разів більше від навантаження стрижня, закріпленого одним кінцем ($\mu = 2$). Тому там, де це можливо, потрібно жорстко кріпити

Величину, яка міститься у правій частині нерівності, називають граничною гнучкістю та позначають $\lambda_{cp} = \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{nc}}$.

Гранична гнучкість залежить тільки від фізико-механічних властивостей матеріалу стрижня й стала для певного матеріалу.

За допомогою поняття граничної гнучкості умову застосовності формули Ейлера можна записати у вигляді

$$\lambda \geq \lambda_{cp}, \quad (9.10)$$

тобто формула Ейлера застосовна тільки тоді, коли гнучкість стрижня більша або дорівнює граничній гнучкості для матеріалу, з якого його виготовлено.

Наприклад, для маловуглецевої сталі Ст3, для якої $\sigma_{nc} = 200$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\lambda_{cp} = 100$. Отже, для стрижнів із маловуглецевої сталі формула Ейлера може бути застосовна, якщо $\lambda \geq 100$. Для чавуну $\lambda_{cp} = 80$, для дерева (сосна) $\lambda_{cp} = 110$.

Якщо гнучкість стрижнів менша від наведених величин, то формула Ейлера вже не застосовується, і тоді користуються емпіричною *формулою Ясинського*, яка має вигляд:

$$\sigma_{кр} = a - b \lambda, \quad (9.11)$$

де a , b – коефіцієнти, які залежать від матеріалу, їх беруть із таблиці 9.1 або з довідкових таблиць.

Таблиця 9.1

Матеріал	λ_{cp}	a	b
		МПа	
Ст2, Ст3	100	310	1,14
Ст5	100	464	3,26
Сталь 40	90	321	1,16
Кремениста сталь	100	589	3,82
Деревина (сосна)	110	29,3	0,194
Чавун	80	776	12,0

Зокрема, для маловуглецевої сталі Ст3 при гнучкостях $\lambda_{cp} = 100$ відповідно буде $a = 310$ МПа і $b = 1,14$ МПа.

Якщо $\lambda < 40$, стрижні розраховують тільки на міцність при простому стисканні, тобто за такою формулою (2.14):

$$\sigma = N/F \leq [\sigma]_{ст.}$$

Розрахунок стиснених стержнів на стійкість можна звести за формою до розрахунку на простий стиск. Розраховуючи стрижневі конструкції, часто застосовують формулу

$$\sigma = N/\varphi F \leq [\sigma]_{\text{ст.}} \quad (9.12)$$

де $[\sigma]_{\text{ст}}$ – головне припустиме напруження на стиск, а $\varphi \leq 1,0$ – коефіцієнт поздовжнього згину, який називають також коефіцієнтом зменшення головного припустимого напруження при розрахунках на стійкість. Величина φ залежить від гнучкості стрижня λ та його матеріалу, її визначають із таблиць. Деякі значення коефіцієнта поздовжнього згину φ наведені у таблиці 9.2.

Таблиця 9.2

Гнучкість λ	Коефіцієнт φ				Гнучкість λ	Коефіцієнт φ			
	Ст2 Ст3 Ст4	Ст5	Чавун	Деревина		Ст2 Ст3 Ст4	Ст5	Чавун	Деревина
0	1	1	1	1	120	0,45	0,36	–	0,22
20	0,96	0,95	0,91	0,97	140	0,36	0,29	–	0,16
40	0,92	0,89	0,69	0,87	160	0,29	0,24	–	0,12
60	0,86	0,82	0,44	0,71	180	0,23	0,19	–	0,10
80	0,75	0,7	0,26	0,48	200	0,19	0,16	–	0,08
100	0,6	0,51	0,16	0,31					

Формула (9.12) дає можливість обчислити силу, яка допускається. Ця формула має такий вигляд:

$$N_{\text{max}} = [P] = \varphi F [\sigma]_{\text{ст.}} \quad (9.13)$$

Розрахунки показують, що найвигіднішими під час роботи стрижнів на стиск є кільцеві й коробочні тонкостінні перерізи. Доведено, що заміна стиснених стержнів у вигляді кутиків і двотаврів трубчастими стрижнями дає економію матеріалу до 20–40 %.

Приклад 9.1. Перевірити на стійкість стояк, зображений на рисунку 9.3, якщо $\ell = 3$ м, $[n]_{\text{ст}} = 2$, матеріал стояка Ст3, $P = 65$ кН, $d = 60$ мм, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Розв’язання. Визначаємо, враховуючи схеми на рисунку 9.4, для заданого закріплення кінців стояка коефіцієнт приведення довжини $\mu = 1$.

Для круга обчислюємо $J_{\text{min}} = \pi d^4/64 = \pi (60 \cdot 10^{-3})^4/64 = 6,36 \cdot 10^{-7}$ м⁴, $F = \pi d^2/4$;

$$i_{\text{min}} = \sqrt{J_{\text{min}} / F} = d/4 = 60 \cdot 10^{-3}/4 = 15 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Визначимо гнучкість стаяка (9.7):

$$\lambda = \mu \ell / i_{\min} = 1 \cdot 3 / 15 \cdot 10^{-3} = 200.$$

Перевіряємо умову застосовності формули Ейлера (9.10):

$$\lambda = 200 > \lambda_{\text{кр}} = 100,$$

де $\lambda_{\text{кр}} = 100$ – гранична гнучкість стрижня для матеріалу сталь Ст3.

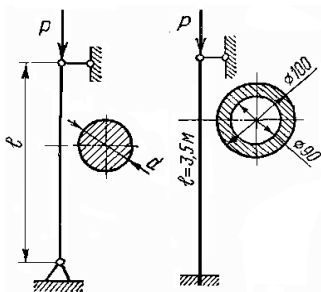


Рисунок 9.3

Рисунок 9.4

Отже, формулу Ейлера можна застосовувати. Обчислимо критичну силу (9.3) у такий спосіб:

$$\begin{aligned} P_{\text{кр}} &= \pi^2 EJ_{\min} / (\mu \ell)^2 = \\ &= \pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 6,36 \cdot 10^{-7} (1 \cdot 3)^2 = \\ &= 139,5 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Визначимо коефіцієнт запасу стійкості стаяка у такий спосіб:

$$n_{\text{ст}} = P_{\text{кр}} / P = 139,5 / 65 = 2,14$$

і перевіряємо виконання умови міцності (1.12)

$$n_{\text{ст}} = 2,14 > [n]_{\text{ст}} = 2, \text{ отже, стійкість стаяка достатня.}$$

Приклад 9.2. Знайти критичну силу $P_{\text{кр}}$ і припустиме навантаження $[P]$ для стаяка кільцевого перерізу зі сталі Ст3 (рис. 9.4), якщо припустиме напруження на стиск $[\sigma]_{\text{ст}} = 140$ МПа. Визначити, з яким коефіцієнтом запасу стійкості $n_{\text{ст}}$ працюватиме стаяк під навантаженням, яке дорівнює припустимому.

Розв'язання. Обчислюємо момент інерції кільцевого перерізу:

$$J_{\min} = \pi (D^4 - d^4) / 64 = \pi [(100 \cdot 10^{-3})^4 - (90 \cdot 10^{-3})^4] / 64 = 169 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Площа поперечного перерізу стаяка

$$F = \pi (D^2 - d^2) / 4 = \pi [(100 \cdot 10^{-3})^2 - (90 \cdot 10^{-3})^2] / 4 = 14,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Знаходимо найменший радіус інерції перерізу (9.6) в такий спосіб:

$$i_{\min} = \sqrt{J_{\min} / F} = \sqrt{169 \cdot 10^{-8} / 14,9 \cdot 10^{-4}} = 3,36 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Для заданого способу кріплення кінців стаяка (рис. 9.2, г) коефіцієнт зведення довжини $\mu = 0,7$. Визначаємо гнучкість стаяка (9.7) у такий спосіб:

$$\lambda = \mu \ell / i_{\min} = 0,7 \cdot 3,5 / (3,36 \cdot 10^{-2}) = 72,5.$$

Перевіряємо умову застосовності формули Ейлера (9.10):

$$\lambda = 72,5 < \lambda_{cp} = 100,$$

де $\lambda_{cp} = 100$ – гранична гнучкість стрижня для матеріалу сталь Ст3.

Отже, формула Ейлера не може бути застосовна.

Розраховуємо критичне напруження за формулою Ясинського (9.11). З таблиці 9.1 знаходимо для сталі Ст3 у такий спосіб: $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа.

$$\text{Тоді} \quad \sigma_{кр} = a - b \lambda = 310 - 1,14 \cdot 72,5 = 227 \text{ МПа.}$$

Визначимо критичну силу у такий спосіб:

$$P_{кр} = F \sigma_{кр} = 14,9 \cdot 10^{-4} \cdot 227 \cdot 10^6 = 340 \cdot 10^3 \text{ Н} = 340 \text{ кН.}$$

Допустиме навантаження $[P]$ визначимо за допомогою коефіцієнта поздовжнього згину φ за формулою (9.13).

Для сталі Ст3 коли $\lambda = 72,5$, то $\varphi = 0,86 - (0,86 - 0,75) \times (72,5 - 60)/(80 - 60) = 0,79$ (див. табл. 9.2 – значення φ знайдено методом лінійної інтерполяції по граничним даним інтервалу у який попадає $\lambda = 72,5$). Далі обчислюємо

$$[P] = \varphi F [\sigma]_{ст} = 0,79 \cdot 14,9 \cdot 10^{-4} \cdot 140 \cdot 10^6 = 164,8 \cdot 10^3 \text{ Н} = 164,8 \text{ кН.}$$

Коефіцієнт запасу стійкості $n_{ст}$ визначаємо зі співвідношення

$$n_{ст} = P_{кр}/[P] = 340/164,8 = 2,05.$$

Згідно з (6.31) одержаний коефіцієнт запасу є допустимим коефіцієнтом запасу стійкості стрижня $[n]_{ст} = 2,05$.

Контрольні запитання до розділу 9

1. Який різновид деформації прямого стрижня називають поздовжнім згином?
2. Яке навантаження на стиснутий стрижень називають критичним?
3. Що називається приведеною довжиною стиснутого стрижня і від чого вона залежить?
4. Як визначається гнучкість стиснутого стрижня?
5. Як записують умову стійкості поздовжньо стиснутого стрижня?
6. У чому зміст інженерної методики розрахунку стиснутого стрижня за коефіцієнтом φ ? Що становить цей коефіцієнт і в яких межах він змінюється?

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Є. С. Уманський. – Київ : Вища школа, 2004. – 655 с.
2. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М., 1986. – 592 с.
3. Прикладна механіка : навч. посібник / [В. Т. Павлице, Є. В. Харченко та ін.]. – Львів, 2004. – 368 с.
4. Прикладная механика / [Т. В. Путята, Н. С. Можаровский и др.]. – Киев, 1977. – 354 с.
5. Эрдеди А. А. Техническая механика / А. А. Эрдеди, Ю. А. Медведев, Н. А. Эрдеди. – М., 1991. – 304 с.
6. Гонтаровська Т. М. Технічна механіка / Т. М. Гонтаровська. – Житомир, 2001. – 252 с.
7. Технічна механіка / [О. О. Ердеді, І. В. Анікін та ін.]. – Київ, 1983. – 378 с.
8. Устюгов И. И. Детали машин / И. И. Устюгов. – М., 1981. – 383 с.
9. Міняйло А. В. Деталі машин : підручник / [А. В. Міняйло, Л. М. Тищенко, Д. І. Мазоренко та ін.]. – Київ : Агроосвіта, 2013. – 448 с.
10. Павловський М. А. Теоретична механіка : підручник / М. А. Павловський. – Київ : Техніка, 2002. – 512 с.
11. Кінницький Я. Т. Теорія механізмів і машин : підручник / Я. Т. Кінницький. – Київ : Наукова думка, 2002. – 660 с.
12. Павлице В. Г. Основи конструювання та розрахунок деталей машин / В. Г. Павлице. – Львів : Афіша, 2003.
13. Піскунов В. Г. Опір матеріалів з основами теорії пружності і пластичності / В. Г. Піскунов, Ю. М. Федоренко, В. Ю. Шевченко та ін. – Київ : Вища школа, 2004. – 336 с.
14. Барзиловский В. П. Прикладная механика : сборник задач для студентов электротехнических специальностей вузов / В. П. Барзиловский. – Киев : Высшая школа, 1985. – 297 с.
15. Бутенин Н. В. Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Ленц, Д. В. Меркин. – [3-е изд.]. – М. : Наука, 1979. – Т. 1. – 272 с. – Т. 2. – 544 с.
16. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики : учебник для вузов / С. М. Тарг. – [10-е изд.]. – М. : Высш. шк., 1986. – 416 с.
17. Курсовое проектирование деталей машин / [С. А. Чернявский и др.]. – [2-е изд.]. – М. : Машиностроение, 1987. – 416 с.
18. Прикладная механика / [К. И. Заблонский, М. С. Беляев, И. Я. Телис и др.]. – Киев : Вища школа, 1984. – 280 с.

19. Кореняко А. С. Теория механизмов и машин / А. С. Кореняко, А. И. Кременштейн. – Киев : Гостехиздат, 1955. – 574 с.
20. Сопротивление материалов / [Г. А. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка и др.]. – Киев : Вища школа, 1986. – 775 с.
21. Курс сопротивления материалов : в 2-х ч. / [М. М. Филоненко-Бородач, С. М. Изюмов, Б. А. Олисов и др.]. – М. : Гостехтеоретиздат, 1955. – Ч. 1. – 644 с. – Ч. 2. – 656 с.
22. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов: в 2-х т. / С. П. Тимошенко. – М. : Наука, 1965. – Т. 1. – 363 с.
23. Александров А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М., 2003. – 560 с.
24. Чихладзе Е. Д. Опір матеріалів / Е. Д. Чихладзе. – Харків : УкрДАЗТ, 2002. – 362 с.
25. Прикладна механіка : Конспект лекцій (для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.050702 – Електромеханіка) / В. П. Шпачук, О. М. Кузнецов, В. Ф. Жуков ; за заг. ред. В. П. Шпачука. – Харків : ХНАМГ, 2012. – 215 с.
26. Технічна механіка : Конспект лекцій / за заг. ред. В. П. Шпачука. – ХНАМГ, 2012. – 211 с.
27. Теоретична механіка: навчально-методичний посібник для студентів технічних спеціальностей / за заг. ред. В. П. Шпачука. – ХНУМГ, 2015. – 120 с.
28. Методичні вказівки до виконання лабораторної роботи «Експериментальне визначення межі витривалості» з дисциплін «Технічна механіка» і «Прикладна механіка» (для студентів 2, 3 курсів усіх форм навчання за напрямками підготовки 6.170202 – Охорона праці, .050702 «Електромеханіка») / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : О. М. Кузнецов, В. П. Шпачук. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2013. – 16 с.
29. Методичні вказівки для практичних занять і самостійної роботи з курсу прикладної механіки (для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.050702 – Електромеханіка) / Харків. нац. акад. міськ. госп-ва ; уклад. : В. П. Шпачук, О. М. Кузнецов. – Харків : ХНАМГ, 2012. – 56 с.
30. Методичні вказівки для виконання розрахунково-графічного завдання, практичних занять, самостійної і контрольної роботи з курсу «Технічна механіка» (для студентів 2, 3 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.170202 – Охорона праці) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : О. М. Кузнецов, А. О. Гарбуз. – Харків : ХНАМГ, 2013. – 42 с.

Навчальне видання

ШПАЧУК Володимир Петрович,
КУЗНЕЦОВ Олександр Миколайович

ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

Частина 1

ОСНОВИ МЕХАНІКИ ДЕФОРМІВНОГО ТІЛА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Відповідальний за випуск *А. О. Гарбуз*

Редактор *В. І. Шалда*

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

Дизайн обкладинки *Т. А. Лазуренко*

Підп. до друку 22.06.2017. Формат 60 × 84/16

Друк на ризографії. Ум. друк. арк. 5,0

Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 5328 від 11.04.2017.